

Лекция № 5.

Спектральный анализ непериодических сигналов

Для практических приложений является важным установление связи между преобразованием сигнала и соответствующим этому преобразованию изменением спектральных характеристик.

Спектральная плотность сигнала, смещенного во времени.

Предположим, что сигнал $u_1(t)$ произвольной формы, существующий на интервале от t_1 до t_2 , имеет спектральную плотность $S_1(j\omega)$. Найдем спектральную плотность этого же сигнала при условии его задержки на интервал t_0 , например преобразователем, называемым *линией задержки*. Функция времени задержанного сигнала при сохранении его формы запишется в виде:

$$u_2(t) = u_1(t - t_0) \quad (5.1)$$

Спектральная плотность задержанного сигнала $S_2(j\omega)$ очевидно имеет вид:

$$S_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} u_1(t-t_0) e^{-j\omega t} dt \quad (5.2)$$

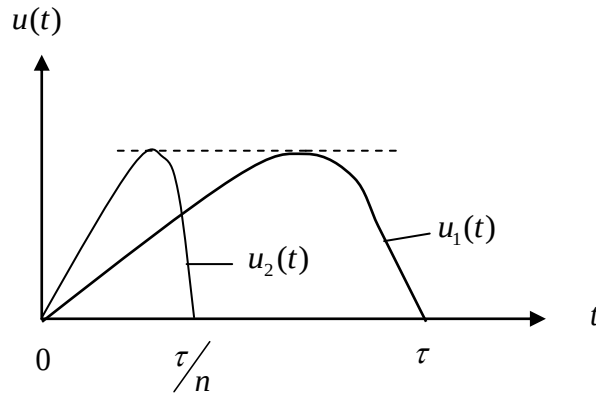
Вводя новую переменную интегрирования $\tau = t - t_0$, получим:

$$S_2(j\omega) = \int_{t_1}^{t_2} u_1(\tau) e^{-j\omega(t_0+\tau)} d\tau = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} S_1(j\omega). \quad (5.3)$$

Из этого соотношения видно, что задержка во времени сигнала $u_1(t)$ на интервал t_0 приводит к изменению фазовой характеристики спектра $S_1(j\omega)$ (спектра фаз) на величину $(-\omega t_0)$. Очевидно, что в общем случае при сдвиге сигнала во времени на величину $(\pm t_0)$ его фазовый спектр изменится на величину $(\pm \omega t_0)$. Спектр амплитуд этого сигнала (модуль спектральной плотности) от положения сигнала на временной оси не зависит.

Спектральная плотность сигнала, сжатого во времени.

Пусть сигнал $u_1(t)$ длительностью τ подвергся сжатию во времени в соответствии с рисунком:



Новый сжатый сигнал $u_2(t)$ связан с исходным сигналом соотношением:

$$u_2(t) = u_1(nt), \quad n > 1 \quad (5.4)$$

Длительность сжатого сигнала очевидно равна τ/n . Определим спектральную плотность сжатого сигнала $u_2(t)$:

$$S_2(j\omega) = \int_0^{\tau/n} u_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau/n} u_1(nt) e^{-j\omega t} dt \quad (5.5)$$

Вводя новую переменную интегрирования $x = nt$, получаем:

$$S_2(j\omega) = \int_0^{\tau} u_1(x) e^{-j\omega \frac{x}{n}} \frac{dx}{n} = \frac{1}{n} \int_0^{\tau} u_1(x) e^{-j\frac{\omega}{n}x} dx \quad (5.6)$$

Интеграл в правой части выражения (5.6) есть не что иное, как спектральная плотность исходного сигнала $u_1(t)$ при частоте ω/n , т. е.:

$$S_2(j\omega) = \frac{1}{n} S_1(j\frac{\omega}{n}). \quad (5.7)$$

Итак, при сжатии сигнала в n раз на временной оси имеем:

- уменьшение модуля спектральной плотности в n раз;
- расширение во столько же раз его спектральных составляющих на оси частот.

Очевидно, при расширении исходного сигнала во времени (т. е. при $n < 1$) имеют место обратные процессы: сужение спектра и увеличение модуля спектральной плотности.

Можно также показать, что длительность сигнала и ширина его спектра амплитуд не могут быть одновременно ограничены конечными интервалами: если длительность сигнала ограничена, то спектр его неограничен, и, наоборот, сигнал с ограниченным спектром длится бесконечно долго. Говорят, что ширина спектра и длительность импульса связаны соотношением неопределенности: $\Delta t \times \Delta f = C$, где Δt – длительность импульса, а Δf – ширина спектра (практическая ширина), C – постоянная, зависящая от формы импульса (в первом приближении принимают $C = 1$).

Спектральная плотность на выходе сумматора сигналов.

Преобразование Фурье, определяющее спектральную плотность заданного сигнала, является *линейным преобразованием*. Если на вход сумматора подать некоторую совокупность сигналов $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$, ..., обладающих спектральными плотностями соответственно $S_1(j\omega)$, $S_2(j\omega)$, $S_3(j\omega)$, ..., то взвешенной сумме сигналов на выходе сумматора $\sum_i a_i u_i(t) = a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t) + \dots$ будет соответствовать спектральная плотность:

$$S(j\omega) = a_1 S_1(j\omega) + a_2 S_2(j\omega) + \dots = \sum_i a_i S_i(j\omega), \quad (5.8)$$

где a_i – произвольные числовые коэффициенты. Для доказательства этого утверждения следует подставить сумму сигналов в формулу для прямого преобразования Фурье.

Спектральная плотность продифференцированного сигнала.

Пусть сигнал $u(t)$ и его спектральная плотность $S(j\omega)$ заданы. Подадим сигнал на вход линейного устройства, осуществляющего дифференцирование сигнала. Сигнал на выходе дифференцирующего устройства будет иметь вид:

$$u_{\text{вых}} = \tau_0 \frac{du(t)}{dt}, \quad (5.9)$$

где τ_0 – константа преобразования.

Используя свойство преобразования Фурье, часто записываемое в виде:

$$F_0 \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] = j\omega F_0 [x(t)], \quad (5.10)$$

где символом F_0 обозначено прямое преобразование Фурье над функцией $x(t)$, получим:

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = j\omega \tau_0 S(j\omega) \quad (5.11)$$

Итак, дифференцирование сигнала по времени эквивалентно алгебраической операции умножения спектральной плотности на множитель $j\omega$, часто называемым оператором дифференцирования в частотной области. Отметим, что при дифференцировании скорость изменения сигнала во времени возрастает, а сам сигнал укорачивается. Следовательно, модуль спектра производной имеет большие значения в области высоких частот по сравнению с модулем исходного сигнала.

Спектральная плотность сигнала на выходе интегратора.

Во многих измерительных системах находят применение так называемые интеграторы – преобразователи, выходной сигнал которых пропорционален интегралу от входного воздействия $u(t)$:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{\tau_0} \int u(t) dt, \quad \tau_0 - \text{константа преобразования.} \quad (5.12)$$

По аналогии с операцией дифференцирования нетрудно найти формулу связи спектральных плотностей сигналов на входе и выходе интегратора:

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{j\omega\tau_0}. \quad (5.13)$$

Так как модуль знаменателя растет линейно с увеличением частоты, это свидетельствует о том, что рассматриваемый интегратор действует подобно фильтру нижних частот, ослабляя высокочастотные спектральные составляющие входного сигнала.

Практическая ширина спектра сигнала.

Реальные сигналы всегда ограничены во времени, следовательно, их амплитудный спектр теоретически неограничен. Однако реальные сигналы генерируются и передаются устройствами, содержащими инерционные элементы (например, емкости и индуктивности в электрических цепях и прочих преобразователях). Поэтому они не могут содержать гармонических составляющих сколь угодно высоких частот.

В связи с этим возникает необходимость ввести в рассмотрение модели сигналов, обладающих как конечной длительностью, так и ограниченным спектром. При этом в соответствии с каким-либо критерием дополнительно ограничивается либо ширина спектра, либо длительность сигнала, либо оба параметра одновременно.

Чаще всего в качестве такого критерия используется энергетический критерий, согласно которому практическую ширину амплитудного спектра $\Delta\omega_{np}$ выбирают так, чтобы в нем была сосредоточена подавляющая часть энергии сигнала. Для этого используют равенство Парсеваля, позволяющее определить энергию сигнала E_c либо через функцию $u(t)$, описывающую реальный сигнал длительностью T_n , либо через модуль ее спектральной плотности $|S(\omega)|$:

$$E_c = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt = \int_0^{T_n} |u(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (5.14)$$

Практическая ширина спектра сигнала, сосредоточенная в диапазоне частот от 0 до некоторого значения ω_{cp} , определяется из соотношения:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_p} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{\eta}{\pi} \int_0^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (5.15)$$

Здесь ω_p – граничная частота, определяющая верхнее значение спектра сигнала; η – коэффициент, достаточно близкий к 1 (на практике его значение выбирают в интервале от 0.9 до 0,998 в зависимости от требований к качеству воспроизведения сигнала). Значение $\eta=0,99$ означает, что в полосе частот от 0 до ω_p содержится 99 % энергии сигнала. Значение граничной частоты находят, решая трансцендентное уравнение (5.15).

Практическая ширина спектра экспоненциального импульса.

Задача: определить граничную частоту спектра сигнала вида

$$u(t) = \begin{cases} u_0 e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad (5.16)$$

ориентируясь на практическую ширину спектра сигнала с $\eta = 0,95$.

Принять следующие значения: $u_0 = 1$ мВ, $a = 10^3$ 1/сек.

Сигналы такого типа, называемые экспоненциальными видеоимпульсами, генерируются многими датчиками (например, полупроводниковыми детекторами при регистрации параметров ионизирующих излучений). Условие $a > 0$ обеспечивает достаточно быстрое (экспоненциальное) уменьшение значений сигнала с ростом времени.

Спектральная плотность такого сигнала равна:

$$S(j\omega) = u_0 \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{u_0}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} \quad (5.17)$$

Подставляя пределы, получаем:

$$S(j\omega) = \frac{u_0}{a+j\omega}. \quad (5.18)$$

$$\text{Спектр амплитуд такого импульса равен: } |S(\omega)| = \frac{u_0}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad (5.19)$$

Трансцендентное уравнение, решение которого позволяет определить ω_p , имеет вид:

$$u_0^2 \int_0^{\omega_p} \frac{d\omega}{a^2 + \omega^2} = 0,95 u_0^2 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{a^2 + \omega^2}. \quad (5.20)$$

$$\text{Так как } \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a} \times \frac{\pi}{2},$$

$$\text{получаем: } \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_p}{a} \right) = 0,95 \times \frac{\pi}{2}. \text{ Отсюда } \omega_p = 1,37 \times 10^4 \text{ 1/с.}$$

Практическую длительность подобных импульсов в измерительной технике обычно определяют из условия десятикратного уменьшения уровня сигнала:

$$\exp(-aT_n) = 0,1. \text{ Отсюда } T_n \approx 2,3/a.$$