Лекция № 6.

Физические измерительные системы и их математические модели

Динамические измерительные системы, в которых связи между измеряемыми величинами (входными сигналами) и выходными сигналами описываются дифференциальными уравнениями, разнообразны по принципам внутреннего устройства и внешним характеристикам. В общем виде математическая модель такой системы может быть записана следующим образом:

$$\overrightarrow{u_{вых}}(t) = T\overrightarrow{u_{вх}}(t), \tag{6.1}$$

где T – системный оператор, результатом воздействия которого на сигнал $\overrightarrow{u_{вх}}(t)$ является $\overrightarrow{u_{вых}}(t)$. В общем случае входной сигнал представляется в виде m-мерного вектора $\overrightarrow{u_{вх}}(t) = \{u_{вх1}(t), u_{вх2}(t), ..., u_{вхm}(t)\}$, а выходной сигнал – в виде n-мерного вектора $\overrightarrow{u_{вых}}(t) = \{u_{вых1}(t), u_{вых2}(t), ..., u_{выхn}(t)\}$. Строго говоря, чтобы полностью задать математическую модель системы, описываемой выражением (6.1), следует указать область допустимых входных воздействий $D_{вх}$ и область допустимых выходных сигналов $D_{вых}$. Проведем классификацию физических систем на основе существенных свойств их математических моделей.

Стационарные и нестационарные системы. Система называется стационарной, если ее выходная реакция не зависит от того, в какой момент времени поступает сигнал, т.е.

$$\overrightarrow{u_{вых}}(t \pm t_0) = T\overrightarrow{u_{вх}}(t \pm t_0), \text{ при любом значении } t_0 . \tag{6.2}$$

Стационарная система называется также системой с постоянными параметрами. Если же свойства системы не инвариантны относительно начала отсчета времени, то такую систему называют нестационарной (системой с переменными параметрами, или параметрической системой).

Линейные и нелинейные системы. Система называется линейной, если в ней выполняется *принцип суперпозиции*, математически записываемый в виде следующих равенств:

$$\begin{aligned} &T\left[\overrightarrow{u_{вх1}}(t) + \overrightarrow{u_{вх2}}(t)\right] = T\overrightarrow{u_{вх1}}(t) + T\overrightarrow{u_{вх2}}(t), \\ &T\left[\alpha\overrightarrow{u_{вх}}(t)\right] = \alpha T\overrightarrow{u_{вх}}(t). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Если эти условия не выполняются, то система является нелинейной. Строго говоря, все физические системы, используемые в измерительной технике, в той или иной степени нелинейны. Однако существует много систем, которые весьма точно описываются линейными моделями. Так, практически всегда можно пренебречь нелинейностью обычных резисторов, конденсаторов, некоторых индуктивных элементов, входящих в состав измерительных цепей.

Из принципа суперпозиции и из условия стационарности вытекает важное следствие – гармонический сигнал, проходя через линейную стационарную систему, сохраняет свою форму, приобретая лишь другие амплитуду и начальную фазу.

Сосредоточенные и распределенные системы. Критерием этой классификации является соотношение физических размеров элементов системы l и рабочей длины волны λ генерируемых или транслируемых сигналов. Если характерный размер системы $l \ll \lambda$, то система относится к классу сосредоточенных. Свойства сосредоточенных систем слабо зависят от конфигурации соединительных проводников, поэтому для их описания используют так называемые *принципиальные схемы*. Так, в радиотехнике сосредоточенные системы широко применяют до рабочих частот в несколько сотен МГц. Лишь при частотах свыше тысячи МГц (СВЧ-диапазон) на смену сосредоточенным системам приходят системы с распределенными параметрами. Их расчет составляет содержание отдельных радиотехнических дисциплин.

Динамические характеристики линейных стационарных систем

Дифференциальное уравнение линейной системы, описывающее связь между мгновенными значениями входного и выходного сигналов, имеет вид:

$$a_0 u_{вых}(t) + a_1 \frac{du_{вых}(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 u_{вых}(t)}{dt^2} + ... + a_n \frac{d^n u_{вых}(t)}{dt^n} = \\ b_0 u_{вх}(t) + b_1 \frac{du_{вх}(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 u_{вх}(t)}{dt^2} + ... + b_m \frac{d^m u_{вх}(t)}{dt^m}. \tag{6.4}$$

Если динамическая система линейна и стационарна, то все коэффициенты этого уравнения a_i и b_j – постоянные вещественные числа. Порядок n этого уравнения ($n \geq m$ всегда) принято называть порядком динамической системы. Используя интегральные преобразования Фурье и Лапласа для решения уравнения (6.4), а также типовые входные воздействия на систему, можно получить динамические характеристики самой системы: частотную характеристику, передаточную функцию, импульсную и переходную характеристики.

Частотная характеристика линейной системы. Применяя к правой и левой частям уравнения (6.4) прямое преобразование Фурье и используя известное свойство для производных функций, получим:

$$F_0\left[u_{вых}(t)\right]\left[a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 ... + a_n(j\omega)^n\right] = \\ F_0\left[u_{вх}(t)\right]\left[b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 ... + b_m(j\omega)^m\right]. \tag{6.5}$$

Введем коэффициент, определяемый как отношение преобразованных по Фурье выходного сигнала к входному:

$$K(j\omega) = \frac{F_0\left[u_{вых}(t)\right]}{F_0\left[u_{вх}(t)\right]} = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + ... b_m(j\omega)^m}{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + ... + a_n(j\omega)^n} \tag{6.6}$$

Коэффициент $K(j\omega)$ называют *частотной характеристикой* динамической системы или *частотным коэффициентом передачи*.

Итак, частотная характеристика динамической системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, представляет собой дробно-рациональную функцию переменной $j\omega$. Коэффициенты этой функции совпадают с коэффициентами дифференциального уравнения. Значения этих коэффициентов определяются физическими свойствами и параметрами динамической системы, а их знание позволяет найти $K(j\omega)$.

Из (6.6) следует, что при известном (регистрируемом) сигнале на выходе измерительной системы и известной частотной характеристике $K(j\omega)$ нетрудно получить с помощью обратного преобразования Фурье функцию, характеризующее входное воздействие на эту систему:

$$u_{вх}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0\left[u_{вых}(t)\right]}{K(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega. \tag{6.7}$$

Частотную характеристику системы $K(j\omega)$ удобно представлять в форме:

$$K(j\omega) = \left|K(j\omega)\right| e^{j\theta(\omega)}. \tag{6.8}$$

Модуль $\left|K(j\omega)\right| = K(\omega)$ называют *амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)* системы, а аргумент $\theta(\omega)$ – *фазочастотной характеристикой (ФЧХ)* системы. Если записать $K(j\omega)$ в виде $K(j\omega) = A(\omega) - jB(\omega)$, то АЧХ и ФЧХ системы могут быть записаны в виде вещественных функций, исходя из соотношений:

$$K(\omega) = \sqrt{\left[A(\omega)\right]^2 + \left[B(\omega)\right]^2}\,, \tag{6.9}$$

$$\theta(\omega) = -arctg\,\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\,. \tag{6.10}$$

Очевидно, что амплитудно-частотная характеристика системы является четной функцией частоты, а фазочастотная характеристика системы – нечетной функцией частоты.

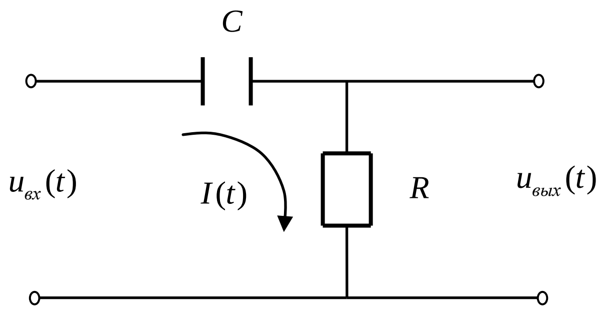
Физическая реализуемость систем. Далеко не каждая функция $K(j\omega)$ может являться частотным коэффициентом передачи физически реализуемой системы. Простейшее ограничение связано с тем, что $K(j\omega)$ должна быть четной функцией частоты, т. е. $K(j\omega) = K^*(-j\omega)$. Сложнее записать условие физической осуществимости системы. Запишем без доказательства *критерий Пэли-Винера:* частотный коэффициент передачи физически реализуемой системы должен быть таким, чтобы существовал интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\ln\left|K(j\omega)\right|\right|}{1+\omega^2}\,d\omega < \infty\,. \tag{6.11}$$

Другие критерии физической реализуемости будут введены позже.

Методы определения $K(j\omega)$**.** В инженерных расчетах частотную характеристику (частотный коэффициент передачи) линейных систем часто находят методами теории цепей на основании принципиальных схем, не прибегая к составлению дифференциальных уравнений. Рассмотрим примеры расчетов применительно к простейшим линейным цепям, содержащим пассивные элементы – резисторы и конденсаторы. Такие цепи широко применяют для преобразований сигналов, имеющих характер дифференцирования или интегрирования.

Рассмотрим $RC-цепь$, на вход которой подан импульсный сигнал вида $u_{вх}(t)$.



Соотношения, связывающие значения входного и выходного сигналов с параметрами $RC-цепи$, очевидны:

$$\begin{aligned} u_{вх}(t) &= I(t)\left[R + \frac{1}{j\omega C}\right], \\ u_{вых}(t) &= I(t)R \end{aligned} \tag{6.12}$$

Используя выражение (6.6), определяем частотную характеристику $RC-цепи$ как отношение преобразованных по Фурье выходного сигнала к входному:

$$K(j\omega) = \frac{j\omega\tau_0}{1+j\omega\tau_0}\,, \tag{6.13}$$

где $\tau_0 = RC$ – постоянная времени $RC-цепи$.

Далее находим модуль (АЧХ) и аргумент (ФЧХ) частотной характеристики:

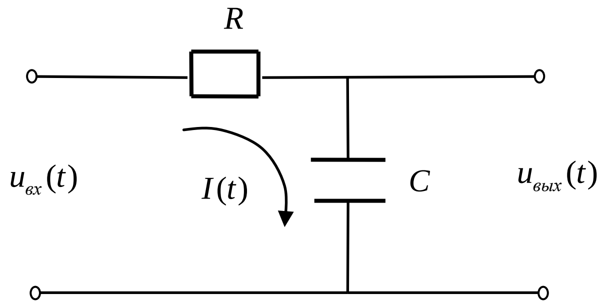
$$|K(j\omega)| = K(\omega) = \frac{\omega\tau_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau_0^2}}, \tag{6.14}$$

$$\theta(\omega) = -arctg\ {}^{1}\!/_{\omega\tau_0}. \tag{6.15}$$

Проанализируем полученные выражения с точки зрения выполнения операции приближенного дифференцирования сигнала. При точном дифференцировании сигнала, описываемом соотношением $u_{вых}(t) = \tau_0 \frac{du_{вх}(t)}{dt}$, частотная характеристика идеального дифференциатора должна иметь вид: $K_{ид}(j\omega) = j\omega\tau_{0,}$ а модуль частотной характеристики – $K_{ид}(\omega) = \omega\tau_{0.}$ Очевидно, что эти условия для реальной $RC-цепи$ будут выполняться, если произведение $\omega\tau_0$ будет пренебрежимо малым по сравнению с единицей для всех частот спектра входного сигнала, в том числе и для самой верхней. Пусть входной сигнал – прямоугольный видеоимпульс длительностью $\tau_и$. Используя грубую оценку верхней граничной частоты в спектре такого импульса $\omega_{гр} = {}^{2\pi}\!/_{\tau_и}$, получаем условие пригодности $RC-цепи$ для приближенного дифференцирования данного сигнала:

$$\tau_0 = RC \ll {}^{\tau_и}\!/_{2\pi}. \tag{6.16}$$

Диаметрально противоположными свойствами будет обладать $RC-цепь$, если в схеме поменять местами резистор и конденсатор:



Частотная характеристика такой $RC-цепи$ запишется в виде:

$$K(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+j\omega\tau_0}, \tag{6.17}$$

а АЧХ и ФЧХ этой цепи будут иметь вид:

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau_0^2}}, \tag{6.18}$$

$$\theta(\omega) = -arctg\omega\tau_0. \tag{6.19}$$

Операция точного интегрирования функции $u_{вх}(t)$ аналитически записывается в виде:

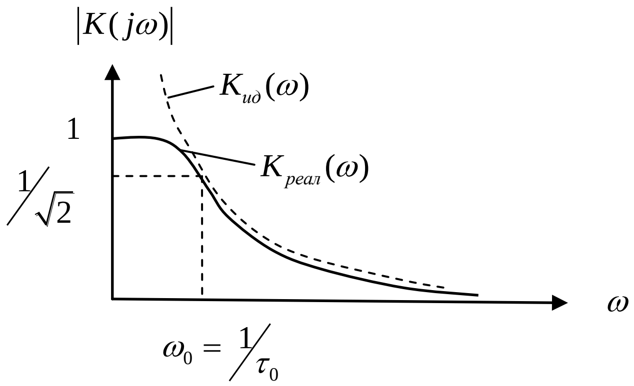
$$u_{вых}(t) = {}^{1}\!/_{\tau_0} \int u_{вх}(t)dt. \tag{6.20}$$

Тогда частотная характеристика идеального интегратора должна иметь вид:

$$K(j\omega) = {}^{1}\!/_{j\omega\tau_0}, \tag{6.21}$$

а АЧХ идеального интегратора — $K(\omega) = {}^{1}\!/_{\omega\tau_0}$. (6. 22)

АЧХ $RC-цепи$ приведена на следующем рисунке:



Приближенное интегрирование $RC-$*цепью* будет выполняться тем точнее, чем больше относительная доля высокочастотных составляющих в спектре сигнала. Другими словами, условие $\omega\tau_0 \gg 1$ должно выполняться для всех частот, в том числе и для самых низких.

Как следует из рисунка, интегрирующие свойства $RC-$*цепи* дают возможность подавлять высокочастотные составляющие спектра входного сигнала и поэтому такая цепь может быть использована в качестве фильтра низких частот.

Частотный коэффициент передачи многозвенной системы. В измерительной технике часто используют сложные системы, отдельные звенья которых (преобразователи, функциональные блоки) включены каскадно (последовательно), т.е. выходной сигнал предыдущего звена служит входным сигналом для последующего. Если известны частотные коэффициенты передачи отдельных звеньев $K_i(j\omega)$, $i = 1, 2, ..., n$, то результирующий коэффициент передачи будет равен:

$$K(j\omega) = \prod_{i=1}^{n} K_i(j\omega). \tag{6.23}$$

В целом применение аппарата преобразований Фурье к анализу прохождения сигналов через линейные стационарные системы позволяет говорить о *спектральном подходе* к описанию таких систем. В соответствии с (6.6) частотная характеристика системы служит множителем пропорциональности между спектральными плотностями сигналов на входе и выходе. Следовательно, анализ систем в частотной области сводится к простым алгебраическим операциям Фурье-преобразованных сигналов на входе и выходе системы и ее частотной характеристики.