

Лекция № 7.

Динамические характеристики измерительных систем

Импульсная характеристика системы. Импульсной характеристикой стационарной измерительной системы, описываемой оператором T , называют функцию $g(t)$, являющуюся откликом системы на входной сигнал в виде δ -функции:

$$g(t) = T\delta(t). \quad (7.1)$$

Поскольку в частотной области связь между спектральными плотностями сигналов на входе и выходе и частотной характеристикой системы описывается выражением:

$$S_g(j\omega) = K(j\omega)S_\delta(j\omega), \quad (7.2)$$

то с учетом: $S_\delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1$, $S_g(j\omega) = K(j\omega)$ (7.3)

Следовательно, $g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$ (7.4)

и $K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt$. (7.5)

Формулы (7.4) и (7.5) устанавливают принципиально важный факт — частотная характеристика и импульсная характеристика линейной стационарной системы связаны между собой прямым и обратным преобразованиями Фурье. Поэтому, зная функцию $K(j\omega)$, всегда можно определить импульсную характеристику $g(t)$ и наоборот. Таким образом, любую систему можно рассматривать либо во временной области с помощью ее импульсной характеристики, либо в частотной области, анализируя $K(j\omega)$. Следует представлять, что импульсная характеристика, так же как и порождающая ее дельта-функция, — результат разумной идеализации. С физической точки зрения импульсная характеристика приближенно отображает реакцию системы на входной импульсный сигнал произвольной формы с единичной площадью при условии, что длительность этого сигнала $\ll$ характерного временного масштаба системы, например, периода ее собственных колебаний.

Переходная характеристика системы. Если на вход линейной стационарной системы, описываемой оператором T , воздействует сигнал, отображаемый единичной функцией (функцией Хевисайда) $1(t)$, то выходную реакцию $h(t) = T[1(t)]$ называют *переходной характеристикой системы*. Так как единичная функция отлична от нуля при $t \geq 0$, то и переходная характеристика физически реализуемой системы отлична от нуля лишь при $t \geq 0$. Можно показать, что между импульсной и переходной характеристиками

имеется тесная связь – импульсная характеристика является производной от переходной характеристики:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (7.6)$$

Интеграл Дюамеля. Знание импульсной характеристики линейной стационарной системы позволяет получить фундаментальное соотношение, связывающее входной и выходной сигналы. Действительно, входной сигнал допускает представление вида:

$$u_{\text{вх}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau, \quad (7.7)$$

называемое фильтрующим свойством δ -функции. Отвечающая ему выходная реакция линейной стационарной системы запишется в виде:

$$u_{\text{вых}}(t) = T u_{\text{вх}}(t) = T \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (7.8)$$

Так как интеграл представляет собой предельное значение суммы, линейный оператор T на основании принципа суперпозиции может быть внесен под знак интеграла. Учитывая, что оператор T воздействует лишь на величины, зависящие от текущего времени t , но не от переменной интегрирования τ , получаем:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) T \delta(t - \tau) d\tau. \quad (7.9)$$

С учетом равенства (7.1) окончательно получаем интеграл Дюамеля:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (7.10)$$

Соотношение (7.10) показывает, что выходной сигнал линейной стационарной системы представляет собой *свертку двух функций*: входного сигнала и импульсной характеристики системы. Для реальных систем (физически реализуемых) всегда выполняется условие: $g(t - \tau) = 0$ при $t < \tau$, т.к. реакция такой системы (отклик на входное воздействие) не может опережать само входное воздействие. Следовательно, можно записать интеграл Дюамеля в виде:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_0^t u_{\text{вх}}(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (7.11)$$

Таким образом, линейная стационарная система, выполняя обработку поступающего на вход сигнала, проводит в момент времени t операцию взвешенного суммирования всех его мгновенных значений за все предыдущее время. Роль весовой функции выполняет при этом импульсная характеристика системы.

Физически реализуемая система должна быть, кроме того, устойчивой. Это означает, что ее импульсная характеристика должна удовлетворять условию абсолютной интегрируемости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty. \quad (7.12)$$

Передачная функция системы. Решение дифференциального уравнения линейной системы (6.4), связывающего входные воздействия и выходные сигналы, может быть осуществлено *операторным методом* с помощью интегрального преобразования Лапласа. Примем допущение, что $u_{\text{вх}}(t) = 0$ при $t < 0$. Тогда изображение по Лапласу входного и выходного сигналов будет иметь вид:

$$L[u_{\text{вх}}(t)] = U_{\text{вх}}(p) = \int_0^{\infty} u_{\text{вх}}(t) e^{-pt} dt, \quad (7.13)$$

$$L[u_{\text{вых}}(t)] = U_{\text{вых}}(p) = \int_0^{\infty} u_{\text{вых}}(t) e^{-pt} dt. \quad (7.14)$$

Вычислив преобразование Лапласа от обеих частей уравнения (6.4) с учетом свойства

$$L\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = p^n F(p), \text{ получим:}$$

$$U_{\text{вых}}(p) [a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n] = U_{\text{вх}}(p) [b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m] \quad (7.15)$$

Введем отношение изображений по Лапласу выходного и входного сигналов, называемое *передаточной функцией* или *операторным коэффициентом передачи* системы:

$$H(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}. \quad (7.16)$$

Если передаточная функция системы известна, то поиск выходной реакции системы на заданное входное воздействие $u_{\text{вх}}(t)$ разбивается на три этапа:

1. $u_{\text{вх}}(t) \rightarrow U_{\text{вх}}(p);$
2. $U_{\text{вых}}(p) = H(p) U_{\text{вх}}(p);$
3. $U_{\text{вых}}(p) \rightarrow u_{\text{вых}}(t).$

Сигнал на выходе системы $u_{\text{вых}}(t)$ находят с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} U_{\text{вых}}(p) e^{pt} dt = \sum_{i=1}^n \operatorname{res} [U_{\text{вых}}(p) e^{pt}] \Big|_{p=p_i} \quad (7.17)$$

Как известно, способ нахождения оригинала выходного сигнала по его изображению с помощью теоремы о вычетах без вычисления интеграла основан на представлении

подынтегрального выражения (7.17) в виде отношения двух многочленов $\varphi(p)/\psi(p)$, определении полюсов подынтегральной функции (значений p_i , являющихся корнями знаменателя $\psi(p)$) и вычислении $u_{\text{вых}}(t)$ по сумме вычетов $\varphi(p)/\psi(p)$ в соответствующих полюсах p_i :

$$u_{\text{вых}}(t) = \sum_{i=1}^n \operatorname{res} \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} \Big|_{p=p_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(p_i)}{\psi'(p_i)}. \quad (7.18)$$

При определении передаточных функций сложных систем, состоящих из ряда отдельных звеньев (преобразователей, функциональных блоков), вначале определяют передаточные функции отдельных звеньев. Далее, если эти звенья соединены последовательно, определяют общую передаточную функцию системы по формуле:

$$H(p) = \prod_{i=1}^n H_i(p), \quad (7.19)$$

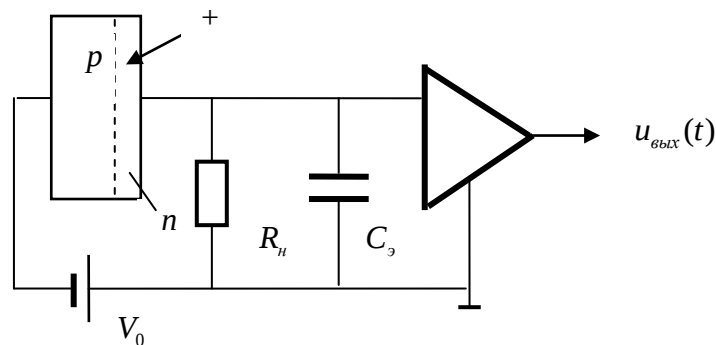
где $H_i(p)$ – передаточные функции отдельных звеньев (n – число звеньев).

Если k звеньев какой либо системы соединены параллельно, то расчет результирующей передаточной функции этой части системы осуществляют по формуле:

$$H(p) = \sum_{i=1}^k H_i(p). \quad (7.20)$$

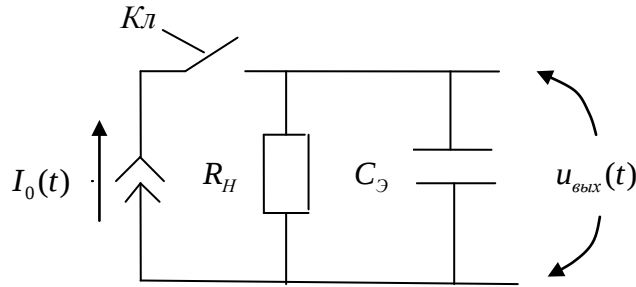
Пример. Определить форму сигнала на выходе кремниевого диффузионного детектора, вызванного регистрацией α -частицы, создавшей заряд q_0 в рабочем объеме детектора.

Схема включения простейшего неоднородного полупроводникового детектора с p-n переходом приведена на рисунке:



Анализ схемы детектора показывает, что формирование импульса происходит на RC-цепи при протекании тока, вызванного движением носителей заряда (электронов и дырок) в рабочем объеме детектора. В ней R_H – резистор, включаемый в цепь для управления длительностью импульса; C_3 – эквивалентная емкость, равная сумме собственной емкости детектора, входной емкости усилителя и емкости соединительного

кабеля. В первом приближении, пренебрегая процессами собирания носителей зарядов, при условии, что время собирания носителей $\tau \ll$ длительности импульса t_u , получим упрощенную эквивалентную схему детектора:



Дифференциальное уравнение данной цепи, составленное относительно напряжения $u_{вых}(t)$, имеет вид:

$$C_3 \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{R_H} = I_0(t). \quad (7.21)$$

В операторном виде уравнение (7.21) записывается так:

$$\frac{u(p)}{R_H} + pC_3 u(p) = i_0(p). \quad (7.22)$$

$$\text{Отсюда } u(p) = i_0(p) \frac{R_H}{1 + p\tau_0}, \quad (7.23)$$

где постоянная времени RC -цепи $\tau_0 = R_H C_3$.

При условии локализации ионизационного эффекта при регистрации α -частицы и пренебрежимо малом времени собирания носителей зарядов импульс тока можно представить в виде $I_0(t) = A\delta(t)$. Значение константы A можно определить, исходя из условия: $q_0 = \int_0^\infty I_0(t)dt = A \int_0^\infty \delta(t)dt = A$. Следовательно, $I_0(t) = q_0\delta(t)$.

Так как $L[\delta(t)] = 1$, уравнение (7.23) запишется в виде:

$$u(p) = \frac{q_0 R_H}{1 + p\tau_0}. \quad (7.24)$$

С учетом выражений (7.17) и (7.18) имеем:

$$\begin{aligned} u_{вых}(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} \frac{q_0 R_H}{1 + p\tau_0} e^{pt} dt = q_0 R_H \sum_{p=p_0} \text{res} \left[\frac{e^{pt}}{1 + p\tau_0} \right] \Bigg|_{p_0 = -1/\tau_0} = \\ &= q_0 R_H \frac{e^{-t/\tau_0}}{\tau_0} = \frac{q_0}{C_3} e^{-t/\tau_0}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Полученное соотношение (7.25) удовлетворительно описывает форму сигналов на выходе полупроводниковых детекторов ионизирующих излучений.