

Лекция 1

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Общие понятия. Теорема Крамера

1. Основные понятия. Рассмотрим систему из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными вида:

[illegible]

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные числа, а коэффициенты a_{ij} и свободные члены b_i , $i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$ являются заданными действительными или комплексными числами. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \text{ порядка } m \times n \quad \text{и} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{ порядка } m \times (n+1)$$

называются соответственно *основной* и *расширенной* матрицами системы (1). Введем вектор-столбцы высоты t

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

и вектор $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ высоты n .

Тогда систему (1.1) можно записать в виде:

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b} \quad (1.2)$$

ИЛИ

$$A\vec{x}=\vec{b} . \quad (1.3)$$

Определение 1.1. *Решением системы (1.1) называется набор из n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, обращающих каждое уравнение системы (1.1) в верное числовое равенство.*

Определение 1.2. Система (1.1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Определение 1.3. Система (1.1) называется *определенной*, если она имеет единственное решение и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Определение 1.4. Если $\vec{b} \neq \vec{0}$, то система (1) называется *неоднородной*, если $\vec{b} = \vec{0}$, то – *однородной*. Однородная система имеет вид $A\vec{x} = \vec{0}$.

Определение 1.5. *Частным решением системы* (1.1) называется любое фиксированное решение этой системы.

Общим решением системы (1.1) называется решение, зависящее от нескольких произвольных постоянных (параметров) и такое, что любое частное решение системы (1.1) получается из общего при специальном выборе этих параметров.

Определение 1.6. *Решить какую-либо систему* (1.1) – это значит или установить ее несовместность, или в случае ее совместности найти все ее решения.

Замечание 1.1. Если в совместной системе (1.1) все коэффициенты a_{ij} и свободные члены b_i – действительны (комплексны), то любое решение этой системы – действительно (комплексно).

Пример 1.1. Система вида

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

есть неоднородная система трех уравнений с четырьмя неизвестными.

2. Решение системы линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера

Теорема 1.1 (Крамера). Пусть в системе (1.1) число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$) и матрица системы A невырождена, т.е. $\det A \neq 0$. Тогда система $A\vec{x} = \vec{b}$ имеет и притом единственное решение, которое может быть найдено по формулам:

$$x_k = \frac{\det D_k}{\det A}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1.4)$$

где матрица D_k имеет вид:

$$D_k = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{b}, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n).$$

Доказательство. Так как $\det A \neq 0$, то существует единственная обратная матрица A^{-1} . Покажем, что вектор-столбец $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ есть решение

системы $A\vec{x} = \vec{b}$. Действительно, в силу ассоциативности умножения матриц имеем

$$A(A^{-1}\vec{b}) = (A \cdot A^{-1})\vec{b} = E\vec{b} = \vec{b}.$$

Единственность указанного решения следует из единственности обратной матрицы A^{-1} . Для доказательства теоремы остается показать справедливость формул (1.4). Развертывая равенство $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, получаем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1k} & A_{2k} & \dots & A_{nk} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^n A_{s1} b_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{s=1}^n A_{sk} b_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{s=1}^n A_{sn} b_s \end{pmatrix}$$

Из теоремы о разложении и последнего равенства и следуют формулы (1.4). #

Пример 1.2. По формулам Крамера решить следующую систему

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Вычислим $\det A = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, т.е. у данной системы

существует единственное решение. Найдем его, вычислив $\det D_1 = -2$, $\det D_2 = 0$, $\det D_3 = 4$. Тогда $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$.

3. Эквивалентные системы. Метод Гаусса решения систем. Теорема Кронекера–Капелли

Определение 1.7. Элементарными преобразованиями системы (1.1) называются следующие преобразования: 1) перестановка двух уравнений местами; 2) умножение обеих частей одного из уравнений на любое число, отличное от нуля; 3) прибавление к обеим частям одного из уравнений соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое число.

Ясно, что элементарные преобразования переводят любую систему (1.1) в другую систему, ей эквивалентную в том смысле, что любое решение исходной системы является решением преобразованной системы и, наоборот, любое решение преобразованной системы является решением исходной системы.

Замечание 1.2. Отметим, что при элементарных преобразованиях ранги основной и расширенной матриц не изменяются, т.е. $RangA = RangA'$ и $Rang\tilde{A} = Rang\tilde{A}'$, где A' и $\tilde{A}'$ – соответственно основная и расширенная матрицы преобразованной системы.

Метод Гаусса. Пусть у системы (1.1) $RangA = r \neq 0$, $m > 1$ – первый шаг. Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Этого всегда можно достичь перестановкой уравнений и переобозначением коэффициентов. Умножим первое уравнение на $\frac{1}{a_{11}}$, и полученное уравнение запишем первым в новой системе. Далее,

умножив первое уравнение исходной системы на $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, где $i = 2, 3, \dots, m$, и

вычтем результат из i -го уравнения. Полученное новое уравнение запишем i -м в новой системе. Итак, на 1-м шаге получим новую систему:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{cases} \quad (1.5)$$

или кратко:

$$A^{(1)}\vec{x} = \vec{b}^{(1)}.$$

Если $RangA = r > 1$, $m > 2$, то осуществляем второй шаг. Первое уравнение системы (1.5) не меняя запишем первым в новой системе. Будем считать, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (этого всегда можно добиться перестановкой уравнений и переобозначением коэффициентов). Умножаем второе уравнение на $\frac{1}{a_{22}^{(1)}}$ и результат запишем вторым уравнением в новой системе. Далее умножим второе уравнение системы (1.5) на $\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ и вычтем результат из i -го уравнения, где $i = 3, \dots, m$. Полученное в результате этого уравнение запишем в новой системе i -м уравнением, и так далее. На r -ом шаге, где $r = RangA \leq m$, окончательно получим систему

$$A^{(r)} \vec{x} = \vec{b}^{(r)},$$

где

$$A^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(r)} & \dots & a_{1r}^{(r)} & a_{1(r+1)}^{(r)} & \dots & a_{1n}^{(r)} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2r}^{(r)} & a_{2(r+1)}^{(r)} & \dots & a_{2n}^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{r(r+1)}^{(r)} & \dots & a_{rn}^{(r)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \vec{b}^{(r)} = \begin{pmatrix} b_1^{(r)} \\ \vdots \\ b_r^{(r)} \\ b_{r+1}^{(r)} \\ \vdots \\ b_m^{(r)} \end{pmatrix},$$

Причем $Rang A^{(r)} = Rang A = r$ в силу замечания 1.2. Запишем последнюю систему в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^{(r)} x_2 + \dots + a_{1r}^{(r)} x_r + a_{1(r+1)}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{1n}^{(r)} x_n = b_1^{(r)} \\ x_2 + a_{23}^{(r)} x_3 + \dots + a_{2r}^{(r)} x_r + a_{2(r+1)}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{2n}^{(r)} x_n = b_2^{(r)} \\ \dots \\ x_r + a_{r(r+1)}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{rn}^{(r)} x_n = b_r^{(r)} \\ 0 \cdot x_{r+1} + \dots + 0 \cdot x_n = b_{r+1}^{(r)} \\ \dots \\ 0 \cdot x_{r+1} + \dots + 0 \cdot x_n = b_m^{(r)} \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Система (1.6) совместна тогда и только тогда, когда $b_{r+1}^{(r)} = \dots = b_m^{(r)} = 0$, т.е. когда ранги ее основной и расширенной матриц совпадают. Если система (1.6) совместна, то последние ее $m - r$ уравнений можно отбросить и тогда с учетом всех, может быть, допущенных переобозначений неизвестных, система (1.1) эквивалентна системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^{(r)} x_2 + \dots + a_{1r}^{(r)} x_r = b_1^{(r)} - (a_{1(r+1)}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{1n}^{(r)} x_n) \\ x_2 + \dots + a_{2r}^{(r)} x_r = b_2^{(r)} - (a_{2(r+1)}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{2n}^{(r)} x_n) \\ \dots \\ x_r = b_r^{(r)} - (a_{r(r+1)}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{rn}^{(r)} x_n) \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Назовем в системе (1.7) все неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$ — главными, а $x_{r+1}, \dots, x_n$ — свободными. Получим общее решение системы (1.7), а следовательно, и (1.1), полагая $x_{r+1} = c_1, x_{r+2} = c_2, \dots, x_n = c_{n-r}$, где $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ — произвольные действительные или комплексные постоянные (параметры) и

последовательно находя неизвестные $x_r, x_{r-1}, \dots, x_2, x_1$, начиная с последнего уравнения в направлении снизу вверх.

В случае $n = r$ также последовательно определяя значения неизвестных $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ снизу вверх, найдем лишь единственное решение системы.

Теорема 1.2 (Кронекера–Капелли). Система (1.1) совместна тогда и только тогда, когда $\text{Rang}A = \text{Rang}\tilde{A}$.

Доказательство. Из метода Гаусса следует, что система (1.1) эквивалента системе (1.6), а система (1.6) совместна тогда и только тогда, когда $\text{Rang}A^{(r)} = \text{Rang}\tilde{A}^{(r)}$. Но при элементарных преобразованиях, как уже отмечалось выше, ранги матриц не меняются. Следовательно, система (1.1) совместна тогда и только тогда, когда $\text{Rang}A = \text{Rang}\tilde{A}$.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Сандаков Е. Б. Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: МИФИ, 2005.
2. Бухарова Т. И., Камынин В. Л., Простокишин В.М. Линейные операторы в линейных векторных пространствах. – М.: НИЯУ МИФИ, 2013.
3. Волков Н.П. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре (2 семестр). – М.: МИФИ, 2017.
4. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Высшая школа, 1998.
5. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1999.
6. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1999.
7. Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии – М.: Наука, 1980, 1998, 1988.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Исследовать систему на совместимость:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

Решение. Выпишем основную и расширенную матрицу заданной системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ранги этих матриц с помощью миноров. Выберем ненулевой минор второго порядка матрицы A :

$$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Рассмотрим миноры третьего порядка, окаймляющие данный минор M_{12}^{12} и вычислим их определители:

$$M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 \cdot 3 - (-3) \cdot 2 \cdot 4 -$$
$$-(-1) \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \cdot 3 = 0,$$

$$M_{124}^{123} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 4 -$$
$$-(-1) \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 3 = 0.$$

Таким образом, ранг основной матрицы 2, для расширенной матрицы существует еще один окаймляющий минор

$$M_{124}^{123} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -20 \neq 0.$$

Его определитель не равен нулю, таким образом, ранг расширенной матрицы 3. По теоремы Кронекера-Капелли, заданная система линейных алгебраических уравнений не совместна и решений не имеет.

Пример 2. Исследовать систему на совместимость, если совместно, то найти её решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выпишем основную и расширенную матрицу заданной системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим ранг этих матриц с помощью элементарных преобразований строк. Рассмотрим расширенную матрицу $\bar{A}$. Первую строку оставим без изменения, ко второй строке прибавим первую, умножая на (-2), к третьей строке прибавим первую, умноженную на (-1), получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Далее первую строку оставим без изменения, третью строку сократим на (-2) и переставим вторую и третью строки, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Первые две строки оставим без изменения, к третьей прибавим вторую, умноженную на 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрицы A и $\bar{A}$ имеют по три линейно независимые строки, поэтому их ранги $Rang(A) = Rang(\bar{A}) = 3$. По теоремы Кронекера-Капелли, данная система имеет единственное решение. Найдём его. Для этого, используя последнюю матрицу, перейдем к системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_3 = 6. \end{cases}$$

Вычислим последовательно значение неизвестных. Из последнего уравнения получим, что $x_3 = 2$. Подставляя это значение неизвестной во второе

уравнение, будем иметь $x_2 = -1$. Теперь подставим значения найденных неизвестных в первое уравнение, получим, что $x_1 = 1$.

Ответ: $(1; -1; 2)$

Пример 3. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований вычислим одновременно ранги обеих матриц.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & | & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & | & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & | & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & | & 0 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & | & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & | & 2 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)}$$

Далее умножим вторую строку на -2 и сложим с третьей, а затем сложим третью строку с последней. Имеем

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Ранг матрицы системы равен 3, так как матрица имеет три ненулевых строки, а ранг расширенной матрицы равен 4. Тогда согласно теореме Кронекера-Капелли система не имеет решений.

Рассмотрим примеры задач, в которых используется критерий совместности $\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A}$.

$$1. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение

Сначала, приведем матрицу к треугольному виду.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

Элементарные преобразования не меняют ранга матриц, поэтому в результате выполненных действий, получены эквивалентные исходной

матрице системы $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ и расширенная матрица системы

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

$\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A} = 3$ значит, по теореме Кронекера-Капелли система совместна.

$$2. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ -2x_1 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение

Приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} = \text{rang } \tilde{A} = 3$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rang } A = 2$$

$\text{rang } A \neq \text{rang } \tilde{A}$. По теореме Кронекера-Капелли система линейных уравнений несовместна.

$$3. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda \end{cases}$$

Решение

Очевидно, что от значения λ зависит, будет ли матрица совместна или нет.

Сначала приведем матрицу к треугольному виду:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & -2 & -7 & -19 & 7 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & -2 & -7 & -19 & 7 \\ 0 & 4 & 14 & 38 & \lambda - 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

При $\lambda \neq 0$: $\text{rang } \tilde{A} = 3$, $\text{rang } A = 2$. По теореме Кронекера-Капелли система линейных уравнений несовместна.

При $\lambda = 0$: $\text{rang } \tilde{A} = 2$, $\text{rang } A = 2$. По теореме Кронекера-Капелли система линейных уравнений совместна.

Задачи для самостоятельной работы к лекции 1

1) Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$, используя теорему Крамера.

2) Решить систему $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$ методом Гаусса.

3) Исследовать на совместность неоднородную систему, зависящую от параметра λ

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 1 \\ x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 = -9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 7x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 7x_4 = \lambda \end{cases}$$

4) Пусть $\pi_1: A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 + D_1 = 0$, $\pi_2: A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 + D_2 = 0$, $\pi_3: A_3x_1 + B_3x_2 + C_3x_3 + D_3 = 0$ есть уравнения трех плоскостей. Исследовать их взаимное расположение.