

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Исследовать систему на совместимость:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

Решение. Выпишем основную и расширенную матрицу заданной системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ранги этих матриц с помощью миноров. Выберем ненулевой минор второго порядка матрицы A :

$$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Рассмотрим миноры третьего порядка, окаймляющие данный минор M_{12}^{12} и вычислим их определители:

$$M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 \cdot 3 - (-3) \cdot 2 \cdot 4 - \\ - (-1) \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \cdot 3 = 0,$$

$$M_{124}^{123} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 4 - \\ - (-1) \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 3 = 0.$$

Таким образом, ранг основной матрицы 2, для расширенной матрицы существует еще один окаймляющий минор

$$M_{124}^{123} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -20 \neq 0.$$

Его определитель не равен нулю, таким образом, ранг расширенной матрицы 3. По теоремы Кронекера-Капелли, заданная система линейных алгебраических уравнений не совместна и решений не имеет.

Пример 2. Исследовать систему на совместимость, если совместна, то найти её решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выпишем основную и расширенную матрицу заданной системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим ранг этих матриц с помощью элементарных преобразований строк. Рассмотрим расширенную матрицу $\bar{A}$. Первую строку оставим без изменения, ко второй строке прибавим первую, умножая на (-2), к третьей строке прибавим первую, умноженную на (-1), получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Далее первую строку оставим без изменения, третью строку сократим на (-2) и переставим вторую и третью строки, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Первые две строки оставим без изменения, к третьей прибавим вторую, умноженную на 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрицы A и $\bar{A}$ имеют по три линейно независимые строки, поэтому их ранги $Rang(A) = Rang(\bar{A}) = 3$. По теоремы Кронекера-Капелли, данная система имеет единственное решение. Найдем его. Для этого, используя последнюю матрицу, перейдем к системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_3 = 6. \end{cases}$$

Вычислим последовательно значение неизвестных. Из последнего уравнения получим, что $x_3 = 2$. Подставляя это значение неизвестной во второе уравнение, будем иметь $x_2 = -1$. Теперь подставим значения найденных неизвестных в первое уравнение, получим, что $x_1 = 1$.

Ответ: $(1; -1; 2)$

Пример 3. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований вычислим одновременно ранги обеих матриц.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & | & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & | & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & | & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-2) \\ +}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & | & 0 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & | & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & | & 2 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Далее умножим вторую строку на -2 и сложим с третьей, а затем сложим третью строку с последней. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы системы равен 3, так как матрица имеет три ненулевых строки, а ранг расширенной матрицы равен 4. Тогда согласно теореме Кронекера-Капелли система не имеет решений.

Рассмотрим примеры задач, в которых используется критерий совместности $\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A}$.

$$1. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение

Сначала, приведем матрицу к треугольному виду.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

Элементарные преобразования не меняют ранга матриц, поэтому в результате выполненных действий, получены эквивалентные исходной

матрице системы $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ и расширенная матрица системы

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

$\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A} = 3$ значит, по теореме Кронекера-Капелли система совместна.

$$2. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ -2x_1 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение

Приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} = \text{rang } \tilde{A} = 3$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rang } A = 2$$

$\text{rang } A \neq \text{rang } \tilde{A}$. По теореме Кронекера-Капелли система линейных уравнений несовместна.

$$3. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda \end{cases}$$

Решение

Очевидно, что от значения λ зависит, будет ли матрица совместна или нет.

Сначала приведем матрицу к треугольному виду:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & -2 & -7 & -19 & 7 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & -2 & -7 & -19 & 7 \\ 0 & 4 & 14 & 38 & \lambda - 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

При $\lambda \neq 0$: $\text{rang } \tilde{A} = 3$, $\text{rang } A = 2$. По теореме Кронекера-Капелли система линейных уравнений несовместна.

При $\lambda = 0$: $\text{rang } \tilde{A} = 2$, $\text{rang } A = 2$. По теореме Кронекера-Капелли система линейных уравнений совместна.