

Лекция 2

ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

Однородная система из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

или $A\vec{x} = \vec{0}$ (2.2)

где $A = (a_{ij})$ – матрица порядка $m \times n$.

Однородная система всегда совместна: у нее всегда существует решение $\vec{x} = \vec{0}$, называемое тривиальным. Любое решение $\vec{x} \neq \vec{0}$ системы (2.1) называется нетривиальным.

Утверждение 2.1. Если $\vec{x}^{(1)}$ и $\vec{x}^{(2)}$ – два произвольных решения системы (2.1), то для любых чисел λ и μ их линейная комбинация $\lambda\vec{x}^{(1)} + \mu\vec{x}^{(2)}$ также является решением системы (2.1).

Доказательство. Справедливость утверждения следует из цепочки равенств

$$A(\lambda \underset{\downarrow}{x}^{(1)} + \mu \underset{\downarrow}{x}^{(2)}) = \lambda \underset{\downarrow}{A} x^{(1)} + \mu \underset{\downarrow}{A} x^{(2)} = \underset{\downarrow}{0}.$$

Замечание 2.2. Только что отмеченное утверждение, очевидно, справедливо для любого конечного числа решений системы (2.1), т.е. если $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots, \vec{x}^{(k)}$ – решения системы (2.1), то и любая их линейная комбинация $\alpha_1\vec{x}^{(1)} + \dots + \alpha_k\vec{x}^{(k)}$ также является решением этой системы.

Следствие 2.1. Если однородная система имеет хотя бы одно нетривиальное решение, то она имеет их бесконечно много.

Имеет место следующая основная теорема для однородных систем

теорема 2.1. Если $\text{Rang} A = n$, то система (2.1) имеет только тривиальное решение, если же $\text{Rang} A = r < n$, то – $n - r$ линейно независимых решений $\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(n-r)}$, причем общее решение (2.1) имеет вид:

$$\vec{x} = C_1\vec{x}^{(1)} + C_2\vec{x}^{(2)} + \dots + C_{n-r}\vec{x}^{(n-r)},$$

где $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ – произвольные действительные или комплексные числа.

Доказательство. Методом Гаусса система (2.1) может быть сведена к эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(r)} x_2 + \dots + a_{1r}^{(r)} x_r = -(a_{1(r+1)}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{1n}^{(r)} x_n) \\ x_2 + \dots + a_{2r}^{(r)} x_r = -(a_{2(r+1)}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{2n}^{(r)} x_n) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_r = -(a_{r(r+1)}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{rn}^{(r)} x_n) \end{cases} \quad (2.3)$$

где $r = \text{Rang}A$. Из системы (2.3) следует, что при $r = n$ она, а следовательно, и эквивалентная ей система (2.1) имеют только тривиальное решение. Если же $\text{Rang}A = r < n$, то присвоим свободным неизвестным $x_{r+1}, \dots, x_n$ в системе (2.3) следующие специальные значения:

$$x_{r+j} = 1, \quad x_{r+1} = \dots = x_{r+j-1} = x_{r+j+1} = \dots = x_n = 0$$

для $j = 1, 2, \dots, n - r$.

Для каждого $j = 1, 2, \dots, n - r$ по указанным свободным неизвестным найдем единственное решение системы (2.3). В результате получим следующую совокупность решений системы:

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_r^{(1)} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ \vdots \\ x_r^{(2)} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{x}^{(n-r)} = \begin{pmatrix} x_1^{(n-r)} \\ \vdots \\ x_r^{(n-r)} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Очевидно, ранг матрицы $(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots, \vec{x}^{(n-r)})$, составленной из столбцов этих решений, равен $n - r$. Поэтому все столбцы $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots, \vec{x}^{(n-r)}$ являются базисными и, следовательно, по теореме о базисном миноре решения $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots, \vec{x}^{(n-r)}$ линейно независимы. Покажем, что общее решение системы (2.1) имеет вид:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n-r} C_i \vec{x}^{(i)}$$

Действительно, пусть $\vec{x}$ – произвольное решение системы (2.1). Тогда

$$\vec{y} = \vec{x} - [C_1 \vec{x}^{(1)} + C_2 \vec{x}^{(2)} + \dots + C_{n-r} \vec{x}^{(n-r)}] \quad (2.5)$$

также есть решение системы (2.1) при любых постоянных числах $C_1, \dots, C_{n-r}$ (см. замечание 2.3). Так как $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ – произвольные числа, то положим

$$C_1 = x_{r+1}, C_2 = x_{r+2}, \dots, C_{n-r} = x_n.$$

Тогда из (2.5) получим

$$y_{r+1} = y_{r+2} = \dots = y_n = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{Итак, } \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ есть решение системы (2.1).}$$

Учитывая (2.6), получаем из (2.3), что $y_1 = y_2 = \dots = y_r = 0$.

$$\text{Таким образом, } \vec{x} = \sum_{i=1}^{n-r} C_i \vec{x}^{(i)}.$$

Определение 2.1. Так построенные решения $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots, \vec{x}^{(n-r)}$ системы (2.1) при $\text{Rang} A = r < n$ называются нормальной фундаментальной системой решений однородной системы уравнений.

Из теоремы 2.1. сразу вытекает важное

следствие 2.2. Однородная система (2.1) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\text{Rang} A < n$.

В частности, всякая система линейных однородных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, имеет ненулевое решение;

система, состоящая из n однородных уравнений с n неизвестными, тогда и только тогда имеет ненулевое решение, когда детерминант системы равен нулю.

Замечание 2.4. Нормальную фундаментальную систему решений можно получить и методом Крамера. Действительно, пусть $\text{Rang} A = r < n$. Не ограничивая общности, можно предположить, что базисный минор основной матрицы A системы (2.1) находится в левом верхнем углу этой матрицы. Тогда система (2.1), очевидно, эквивалентна системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -(a_{1(r+1)}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n) \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r = -(a_{2(r+1)}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -(a_{r(r+1)}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n) \end{cases} \quad (2.7)$$

причем

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ .. & .. & .. \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Полагая в этой системе свободные неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$ поочередно равными $x_{r+j} = 1, x_{r+1} = \dots = x_{r+j-1} = x_{r+j+1} = \dots = x_n = 0$ для $j = 1, 2, \dots, n-r$, получаем нормальную фундаментальную систему решений (2.4).

Определение 2.2. Любая совокупность из $(n-r)$ – линейно независимых решений $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n-r)}$ системы (2.1) (здесь $r = \text{Rang} A < n$) называется фундаментальной системой решений однородной системы (2.1).

Замечание 2.5. Пусть у однородной системы (2.1) $\text{Rang} A = r < n$. Чтобы построить некоторую фундаментальную систему решений однородной системы (2.1) можно поступить следующим образом: зафиксировать некоторый определитель порядка $(n-r)$, отличный от нуля, а затем в системе (2.3), эквивалентной (2.1), полагать значения $x_{r+1}, \dots, x_n$ свободных неизвестных равными соответственно элементам i -ого столбца ($i = 1, 2, \dots, n-r$) данного фиксированного определителя. В результате получим решение $\vec{x}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n-r$. Совокупность всех таких решений $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots, \vec{x}^{(n-r)}$ ввиду их явной линейной независимости и будет фундаментальной системой решений системы (2.1). Если фиксированный определитель есть определитель единичной матрицы, то получим нормальную фундаментальную систему решений системы (2.1).

Теорема 2.4. Если у однородной системы (2.1) $\text{Rang} A = r < n$, а $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n-r)}$ – фундаментальная система решений, то общее решение системы (2.1) имеет вид:

$$\vec{x} = C_1 \vec{y}^{(1)} + C_2 \vec{y}^{(2)} + \dots + C_{n-r} \vec{y}^{(n-r)}$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$B = (\vec{x}, \vec{y}^{(1)}, \dots, \vec{y}^{(n-r)}) \text{ порядка } n \times (n-r+1).$$

Очевидно,

$$\text{Rang} B \geq n-r \quad (2.8)$$

так как $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n-r)}$ линейно независимы. С другой стороны столбцы

$$\vec{x}, \vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n-r)}$$

есть решения системы (2.1), а следовательно, и (2.3). Поэтому в матрице B первые r строк есть линейная комбинация остальных. Следовательно, $\text{Rang} B \leq n-r$. Вместе с (2.8) это дает $\text{Rang} B = n-r$. Базисный минор

матрицы B находится в столбцах $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n-r)}$. Из теоремы о базисном миноре следует, что столбец $\vec{x}$ есть линейная комбинация базисных, т.е.

$$\vec{x} = C_1 \vec{y}^{(1)} + C_2 \vec{y}^{(2)} + \dots + C_{n-r} \vec{y}^{(n-r)}$$

НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим неоднородную систему, записанную в матричном виде

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (2.9)$$

Теорема 2.5. Общее решение неоднородной совместной системы (2.9) есть сумма какого-нибудь частного решения системы (2.9) и общего решения однородной системы (2.1), т.е.

$$\vec{x}^{(OH)} = \vec{x}^{(CH)} + \vec{x}^{(OO)} \quad (2.10)$$

Здесь $\vec{x}^{(OH)}$ и $\vec{x}^{(CH)}$ – соответственно общее и частное решения неоднородной системы (2.9), а $\vec{x}^{(OO)}$ – общее решение однородной системы (2.1).

Доказательство. Очевидно, что столбец $\vec{x}^{(OH)}$, определяемый формулой (2.10), является решением неоднородной системы (2.9). Действительно,

$$A\vec{x}^{(OH)} = A(\vec{x}^{(CH)} + \vec{x}^{(OO)}) = A\vec{x}^{(CH)} + A\vec{x}^{(OO)} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$$

Обратно любое решение неоднородной системы (2.9) представимо в виде (2.10). Действительно, пусть $\vec{x}$ – произвольное решение системы (2.9), а $\vec{x}^{(CH)}$ – частное решение неоднородной системы (2.9). Тогда $A(\vec{x} - \vec{x}^{(CH)}) = A\vec{x} - A\vec{x}^{(CH)} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$. Следовательно, $\vec{x} - \vec{x}^{(CH)}$ – есть решение однородной системы (2.1), т.е. $\vec{x} = \vec{x}^{(CH)} + \vec{x}^{(OO)}$.

Следствие 2.3. Если у неоднородной системы (2.9) $\text{Rang} A = r < n$, а $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n-r)}$ – фундаментальная система решений соответствующей однородной системы (2.1), то общее решение $\vec{x}^{(OH)}$ неоднородной системы имеет вид:

$$\vec{x}^{(OH)} = \vec{x}^{(CH)} + \sum_{i=1}^{n-r} C_i \vec{y}^{(i)},$$

где $\vec{x}^{(CH)}$ – какое-нибудь частное решение системы (2.9).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Решить следующую систему

$$\begin{cases} 5x_1 - 8x_2 + 6x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ -3x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -3. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу этой системы методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -8 & 6 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & -5 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Итак, $\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A = 2$, тогда фундаментальная система решений имеет вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ а частное решение: } \vec{x}^{(CH)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\vec{x}^{(OH)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10C + 1 \\ 7C \\ C \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти общее решение и ФСР однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение. Приведем систему к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса. Для этого записываем матрицу системы (в данном случае, так как система однородная, то ее правые части равны нулю, в этом случае столбец свободных коэффициентов можно не выписывать, так как при любых элементарных преобразованиях в правых частях будут получаться нули):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

с помощью элементарных преобразований приводим данную матрицу к ступенчатому виду. От второй строки отнимаем первую, от третьей - четыре первых, от четвертой - две первых:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

Обнуляем элементы второго столбца, стоящие под главной диагональю, для этого от третьей строки отнимаем три вторых, к четвертой прибавляем вторую:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

От четвертой строки отнимем $\frac{4}{3}$ третьей и третью строку умножим на $\frac{1}{3}$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нулевые строки можно далее не рассматривать, тогда получаем, что

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Далее делаем нули над главной диагональю, для этого от первой строки

отнимаем третью, а ко второй строке прибавляем третью:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

то есть получаем систему, соответствующую данной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Или, выразив одни переменные через другие, будем иметь:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 6x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_2 - \frac{5}{2}x_4 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = 3x_4 \end{cases}$$

Здесь x_2, x_4 - независимые (или свободные) переменные (это те переменные, через которые мы выражаем остальные переменные), x_1, x_3, x_5 - зависимые (связанные) переменные (то есть те, которые выражаются через свободные). Количество свободных переменных равно разности общего количества переменных n (в рассматриваемом примере $n=5$, так как система зависит от пяти переменных) и ранга матрицы r (в этом случае получили, что $r=3$ - количество ненулевых строк после приведения матрицы к ступенчатому виду): $n-r=5-3=2$.

Так как ранг матрицы $r=3$, а количество неизвестных системы $n=5$, то тогда количество решений в ФСР $n-r=5-3=2$ (для проверки, это число должно равняться количеству свободных переменных).

Для нахождения ФСР составляем таблицу, количество столбцов которой соответствует количеству неизвестных (то есть для рассматриваемого примера равно 5), а количество строк равно количеству решений ФСР (то есть имеем две строки). В заголовке таблицы

выписываются переменные, свободные переменные отмечаются стрелкой. Далее свободным переменным придаются любые, одновременно не равные нулю значений и из зависимости между свободными и связанными переменными находятся значения остальных переменных. Для рассматриваемой задачи эта зависимость имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 6x_4 \\ x_3 = x_2 - \frac{5}{2}x_4 \\ x_5 = 3x_4 \end{cases}$$

Тогда придавая в первом случае, например, независимым переменным значения $x_2 = 1, x_4 = 0$ получаем, что

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 6 \cdot 0 = -1, \\ x_3 = 1 - \frac{5}{2} \cdot 0 = 1, \\ x_5 = 3 \cdot 0 = 0. \end{cases}$$

Полученные значения записываем в первую строку таблицы. Аналогично, беря $x_2 = 0, x_4 = 2$, будем иметь, что $\begin{cases} x_1 = 12, \\ x_3 = -5, \\ x_5 = 6 \end{cases}$ что и определяет

второе решение ФСР. В итоге получаем следующую таблицу:

↓		↓		
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-1	1	1	0	0
12	0	-5	2	6

Эти две строчки и есть фундаментальным решением заданной однородной СЛАУ. Частное решение системы:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Общее решение является линейной комбинацией частных решений:

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

где коэффициенты C_1, C_2 не равны нулю одновременно. Или запишем общее решение в таком виде:

$$\begin{cases} x_1 = -C_1 + 12C_2 \\ x_2 = C_1 \\ x_3 = C_1 - 5C_2 \\ x_4 = 2C_2 \\ x_5 = 6C_2 \end{cases}$$

Придавая константам C_1, C_2 определенные значения и подставляя их в общее решение, можно будет находить частные решения однородной СЛАУ.

Задачи к лекции 2

1) Найти общее решение и фундаментальную систему решений для однородной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

2) Исследовать совместность и найти общее решение неоднородной системы (указав ФСР соответствующей однородной системы и частное решение неоднородной системы)

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

3) Решить в зависимости от параметра λ следующую однородную систему уравнений (указав ФСР).

$$\begin{cases} -4x_1 + (2 + 2\lambda)x_2 + 2\lambda x_3 + 2\lambda x_4 = 0, \\ \lambda x_1 + (1 + \lambda)x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ \lambda x_1 + (1 + \lambda)x_2 - 2x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ -\lambda x_1 - (1 + \lambda)x_2 - \lambda x_3 - (2 + 2\lambda)x_4 = 0. \end{cases}$$

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Волков Н.П. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре (2 семестр).– М.: МИФИ, 2017.
2. Бухарова Т. И., Камынин В. Л., Простокишин В.М. Линейные операторы в линейных векторных пространствах.– М.: НИЯУ МИФИ, 2013.
3. Сандаков Е. Б. Основы аналитической геометрии и линейной алгебры.– М.: МИФИ, 2005.
4. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.– М.: Высшая школа, 1998.
5. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия.– М.: Наука, 1999.
6. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра.– М.: Наука, 1999.
7. Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии – М.: Наука, 1980, 1998, 1988.