Примеры решения задач

Пример 1. Найти общее решение и ФСР однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение. Приведем систему к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса. Для этого записываем матрицу системы (в данном случае, так как система однородная, то ее правые части равны нулю, в этом случае столбец свободных коэффициентов можно не выписывать, так как при любых элементарных преобразованиях в правых частях будут получаться нули):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

с помощью элементарных преобразований приводим данную матрицу к ступенчатому виду. От второй строки отнимаем первую, от третьей - четыре первых, от четвертой - две первых:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

Обнуляем элементы второго столбца, стоящие под главной диагональю, для этого от третьей строки отнимаем три вторых, к четвертой прибавляем вторую:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

От четвертой строки отнимем $\frac{4}{3}$ третьей и третью строку умножим на $\frac{1}{3}$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нулевые строки можно далее не рассматривать, тогда получаем, что

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Далее делаем нули над главной диагональю, для этого от первой строки отнимаем третью, а ко второй строке прибавляем третью:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

то есть получаем систему, соответствующую данной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Или, выразив одни переменные через другие, будем иметь:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 6x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_2 - \dfrac{5}{2}x_4 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = 3x_4 \end{cases}$$

Здесь x_2, x_4 - независимые (или свободные) переменные (это те переменные, через которые мы выражаем остальные переменные), x_1, x_3, x_5 - зависимые (связанные) переменные (то есть те, которые выражаются через

свободные). Количество свободных переменных равно разности общего количества переменных n (в рассматриваемом примере $n=5$, так как система зависит от пяти переменных) и ранга матрицы r (в этом случае получили, что $r=3$ - количество ненулевых строк после приведения матрицы к ступенчатому виду): $n-r=5-3=2$.

Так как ранг матрицы $r=3$, а количество неизвестных системы $n=5$, то тогда количество решений в ФСР $n-r=5-3=2$ (для проверки, это число должно равняться количеству свободных переменных).

Для нахождения ФСР составляем таблицу, количество столбцов которой соответствует количеству неизвестных (то есть для рассматриваемого примера равно 5), а количество строк равно количеству решений ФСР (то есть имеем две строки). В заголовке таблицы выписываются переменные, свободные переменные отмечаются стрелкой. Далее свободным переменным придаются любые, одновременно не равные нулю значений и из зависимости между свободными и связанными переменными находятся значения остальных переменных. Для рассматриваемой задачи эта зависимость имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 6x_4 \\ x_3 = x_2 - \dfrac{5}{2}x_4 \\ x_5 = 3x_4 \end{cases}$$

Тогда придавая в первом случае, например, независимым переменным значения $x_2=1,\ x_4=0$ получаем, что

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 6\cdot 0 = -1, \\ x_3 = 1 - \dfrac{5}{2}\cdot 0 = 1, \\ x_5 = 3\cdot 0 = 0. \end{cases}$$

Полученные значения записываем в первую строку таблицы. Аналогично, беря $x_2=0, x_4=2$, будем иметь, что $\begin{cases} x_1 = 12, \\ x_3 = -5, \\ x_5 = 6 \end{cases}$ что и определяет второе решение ФСР. В итоге получаем следующую таблицу:

	↓		↓	
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-1	1	1	0	0
12	0	-5	2	6

Эти две строчки и есть фундаментальным решением заданной однородной СЛАУ. Частное решение системы:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Общее решение является линейной комбинацией частных решений:

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 = C_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

где коэффициенты C1,C2 не равны нулю одновременно. Или запишем общее решение в таком виде:

$$\begin{cases} x_1 = -C_1 + 12C_2 \\ x_2 = C_1 \\ x_3 = C_1 - 5C_2 \\ x_4 = 2C_2 \\ x_5 = 6C_2 \end{cases}$$

Придавая константам C_1, C_2 определенные значения и подставляя их в общее решение, можно будет находить частные решения однородной СЛАУ.

Пример 2. Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Если система является неопределённой, указать фундаментальную систему решений.

Решение. Итак, мы имеем однородную СЛАУ, у которой 3 уравнения и 4 переменных: x_1, x_2, x_3, x_4. Так как количество переменных больше количества уравнений, то такая однородная система не может иметь единственное решение. Найдём решения СЛАУ, используя метод Гаусса:

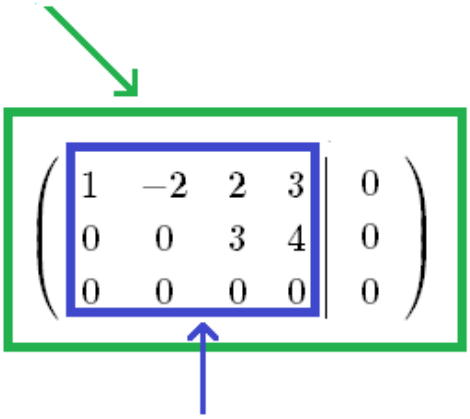
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & 9 & 13 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left|\begin{array}{l}\text{поменяем местами первую и третью}\\ \text{строки, чтобы первым элементом}\\ \text{первой строки стала единица.}\end{array}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 13 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} II + I \\ III - 3 \cdot I \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) III - II \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Мы завершили прямой ход метода Гаусса, приведя расширенную матрицу системы к ступенчатому виду. Слева от черты расположены элементы преобразованной матрицы системы, которую мы также привели к ступенчатому виду. Напомню, что если некая матрица приведена к ступенчатому виду, то её ранг равен количеству ненулевых строк.

Это преобразованная расширенная матрица системы. Она является ступенчатой и содержит 2 ненулевых строки. Вывод: её ранг равен 2.



Это преобразованная матрица системы. Она является ступенчатой и содержит 2 ненулевых строки. Вывод: её ранг равен 2.

И матрица системы, и расширенная матрица системы после эквивалентных преобразований приведены к ступенчатому виду; они содержат по две ненулевых строки. Вывод: $RangA = Rang\tilde{A} = 2$.

Итак, заданная СЛАУ содержит 4 переменных (обозначим их количество как n, т.е. $n = 4$). Кроме того, ранги матрицы системы и расширенной матрицы системы равны между собой и равны числу $r = 2$. Так

как $r < n$, то согласно следствию из теоремы Кронекера-Капелли СЛАУ является неопределённой (имеет бесконечное количество решений).

Найдём эти решения. Для начала выберем базисные переменные. Их количество должно равняться r, т.е. в нашем случае имеем две базисные переменные. Какие именно переменные (ведь у нас их 4 штуки) принять в качестве базисных? Обычно в качестве базисных переменных берут те переменные, которые расположены на первых местах в ненулевых строках преобразованной матрицы системы, т.е. на "ступеньках". Что это за "ступеньки" показано на рисунке:

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

На "ступеньках" стоят числа из столбцов №1 и №3. Первый столбец соответствует переменной x1, а третий столбец соответствует переменной x3. Именно переменные x_1 и x_3 примем в качестве базисных. Количество свободных переменных, как и количество решений в ФСР, равно $n - r = 2$. Свободными переменными будут x_2 и x_4. Нам нужно выразить базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -\frac{4}{3}x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

Теперь найдем фундаментальную систему решений. ФСР будет содержать $n - r = 2$ решения. Для нахождения ФСР составим таблицу.

	x_1	x_2	x_3	x_4
X_1	2	1	0	0
X_2	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1

Из второй и третьей строки таблицы мы и запишем ФСР. Совокупность $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. и есть ФСР данной системы. Общее решение можно записать развёрнутом виде так:

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 3. Исследовать СЛАУ $\begin{cases} kx_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_2 + kx_3 = 5. \end{cases}$ на совместность и найти решение системы в зависимости от значений параметра k.

Решение. Чтобы исследовать заданную систему на совместность, нам нужно найти ранг матрицы системы A и ранг расширенной матрицы системы $\tilde{A}$. Сделать это можно несколькими путями. Стоит учесть, что в данном примере нам требуется не только исследовать систему на совместность, но и указать её решения. Итак, запишем и начнём преобразовывать расширенную матрицу системы. При записи расширенной матрицы системы поменяем местами первую и вторую строки. Это нужно для того, чтобы первым элементом первой строки стало число -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ k & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & k & 5 \end{array}\right) r_2 + k \cdot r_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2+k & 1+2k & 8+7k \\ 0 & 1 & k & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{меняем местами} \\ \text{вторую и третью строки} \end{array} \right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & k & 5 \\ 0 & 2+k & 1+2k & 8+7k \end{array}\right) r_3 - (2+k) \cdot r_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & k & 5 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & 2k-2 \end{array}\right)$$

Мы привели расширенную матрицу системы к ступенчатому виду. Напомню, что до черты расположена преобразованная матрица матрица системы:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1-k^2 \end{pmatrix}.$$

Каким бы ни было значение параметра k, полученная нами после преобразований матрица будет содержать не менее двух ненулевых строк (первая и вторая строки точно останутся ненулевыми). Вопрос о количестве решений зависит лишь от третьей строки.

В следствии из теоремы Кронекера-Капелли указаны три случая, и в данном примере легко рассмотреть каждый из них. Начнём с варианта $RangA \neq RangA\tilde{}$, при котором система не имеет решений, т.е. несовместна.

1) rangA≠rangA˜

Ранги будут не равны друг другу лишь в одном случае: когда $1-k^2=0$, при этом $2k-2\neq 0$. В этом случае преобразованная матрица системы будет содержать две ненулевых строки (т.е. $RangA=2$), а преобразованная расширенная матрица системы будет содержать три ненулевых строки (т.е. $RangA\tilde{}=3$). Иными словами, нам требуется решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 1-k^2=0; \\ 2k-2\neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2=1; \\ k\neq 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем: k=1 или k=−1, однако k≠1, поэтому остаётся лишь один случай: k=−1. Следовательно, при k=−1 система не имеет решений.

2) rangA=rangA˜<3

Рассмотрим второй пункт следствия из теоремы Кронекера-Капелли – ранги равны между собой, но меньше, чем количество переменных (т.е. меньше 3). Это возможно лишь в том случае, если последняя строка преобразованной расширенной матрицы системы полностью станет нулевой, т.е.

$$\begin{cases} 1-k^2=0; \\ 2k-2=0. \end{cases}$$

Из данной системы имеем: k=1. Именно при k=1 третья строка преобразованной расширенной матрицы системы станет нулевой, поэтому rangA=rangA˜=2. При этом, повторюсь, у нас всего три переменных, т.е. имеем случай rangA=rangA˜=2<3.

Система имеет бесконечное количество решений. Найдём эти решения. Подставим k=1 в преобразованную матрицу и продолжим операции метода Гаусса. Третью строку (она станет нулевой) просто вычеркнем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & k & 5 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & 2k-2 \end{array}\right) \to |k=1| \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{l}\text{переносим третий столбец} \\ \text{за черту}\end{array}\right| \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) r_1 - r_2 \to \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) -1 \cdot r_1 \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Из последней матрицы имеем:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 2; \\ x_2 = -x_3 + 5. \end{cases}$$

3) rangA=rangA˜=3

Рассмотрим третий пункт следствия из теоремы Кронекера-Капелли – ранги равны между собой и равны количеству переменных. Это возможно лишь в том случае, если $1-k^2 \neq 0$, т.е. $k \neq -1$ и $k \neq 1$. Продолжаем решение методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & k & 5 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & 2k-2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & k & 5 \\ 0 & 0 & (1-k)(1+k) & -2(1-k) \end{array}\right) r_3 : ((1-k)(1+k)) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & k & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2/(1+k) \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 - 2r_3 \\ r_2 - k \cdot r_3 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & (7k+11)/(k+1) \\ 0 & 1 & 0 & (7k+5)/(k+1) \\ 0 & 0 & 1 & -2/(1+k) \end{array}\right) r_1 - r_2 \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 6/(k+1) \\ 0 & 1 & 0 & (7k+5)/(k+1) \\ 0 & 0 & 1 & -2/(1+k) \end{array}\right) -1 \cdot r_1 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6/(k+1) \\ 0 & 1 & 0 & (7k+5)/(k+1) \\ 0 & 0 & 1 & -2/(1+k) \end{array}\right)$$

Из последней матрицы имеем:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{6}{k+1}; \\ x_2 = \dfrac{7k+5}{k+1} \\ x_3 = -\dfrac{2}{k+1}. \end{cases}$$

Ответ:

- При k=−1 система несовместна.
- При k=1 система является неопределённой. Общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 2; \\ x_2 = -x_3 + 5; \\ x_3 \in R. \end{cases}$$

- При $k \neq -1$ и $k \neq 1$ система является определённой. Решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{6}{k+1}; \\ x_2 = \dfrac{7k+5}{k+1} \\ x_3 = -\dfrac{2}{k+1}. \end{cases}$$