Обыкновенные дифференциальные уравнения

Основные понятия, относящиеся к дифференциальным уравнениям: порядок уравнения, решение уравнения, интегральная кривая, интеграл. Задача Коши, начальные данные. Формулировка достаточных условий существования и единственности решения задачи Коши.

1.Основные понятия, относящиеся к дифференциальным уравнениям: порядок уравнения, решение уравнения, интегральная кривая, интеграл.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)- это уравнение, в котором участвуют неизвестная функция $y(x)$ от одной переменной x, и ее производные. Таким образом, ОДУ является уравнением следующего вида

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

где штрих означает дифференцирование по x. Число n (порядок старшей производной, входящей в данное уравнение) называется порядком дифференциального уравнения (1).

Наиболее часто встречаются дифференциальные уравнения вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}), \tag{2}$$

в которых старшая производная $y^{(n)}$ выражается в виде функции от переменных x, y и производных $y^{(i)}$ порядков меньше n. Такие дифференциальные уравнения называются нормальными или разрешенными относительно производной.

В противоположность уравнениям вида (2), дифференциальные уравнения вида (1) называются уравнениями, не разрешенными относительно производной или неявными дифференциальными уравнениями.

Определение-1. Решением дифференциального уравнения (1) называется n раз дифференцируемая функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению во всех точках своей области определения.

Решение дифференциального уравнения (1) может быть задана в явной форме, в неявной форме или параметрически.

Определение-2. Говорят, что решение $y(x)$ дифференциального уравнения (1) задана параметрически,если переменные x, y являются дифференцируемыми функциями от другой переменной (параметра t)

$$x = x(t), y = y(t),$$

причем $x'(t) \neq 0$ и $y(x) = y(t(x))$,где $t = t(x)-$ функция,обратная к $x = x(t)$. В этом случае производная $y'(x)$ находится по формуле

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Определение-3. Говорят, что решение $y(x)$ дифференциального уравнения (1) задана в неявной форме уравнением

$$\Phi(x, y) = 0,$$

если функция $\Phi(x, y)$ дифференцируема, $\Phi(x, y)_y \neq 0$ и имеет место тождество $\Phi(x, y(x)) = 0$.

Производная неявно заданной функции находится по формуле

$$y' = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y}$$

Уравнение $\varphi(x, y) = 0$, задающее в неявном виде решение дифференциального уравнения (1.1), называется интегралом дифференциального уравнения. График решения (интеграла) дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

Общим решением дифференциального уравнения (1) называется функция

$$y = \varphi(, C_1, C_2, ..., C_n),$$

зависящая от x и n произвольных постоянной $C_1, C_2, ..., C_n$, которая удовлетворяет следующим двум условиям:

1) при любом допустимом значении постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, она удовлетворяет уравнению (1);

2) каково бы ни были начальные условия $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0 ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, можно найти единственный набор значений $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$, такие, что решение

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$$

удовлетворяет данному начальному условию.

Уравнение

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0,$$

задающее общее решение в неявном виде, называется общим интегралом уравнения.

Общее решение не всегда описывает все множество решений дифференциального уравнения. Решение, в каждой точке которого нарушено условие единственности (т. е. через каждую точку интегральной кривой , проходит помимо еще хотя бы одна интегральная кривая, называется особым. Особое решение, очевидно, не входит в общее решение дифференциального уравнения. График особого решения называют особой интегральной кривой уравнения. С геометрической точки зрения особая интегральная кривая является огибающей семейства интегральных кривых

С геометрической точки зрения общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения представляет собой семейство интегральных кривых, зависящих от n параметра $C_1, C_2, ..., C_n$. Решение уравнения, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0 ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, будет изображаться определенной кривой этого семейства.

Как известно, теория обыкновенных дифференциальных уравнений начала развиваться в XVII веке одновременно с возникновением диф-ференциального и интегрального исчисления. Необходимость находить траектории движений, явилась толчком для создания Ньютоном нового исчисления. Законы Ньютона позволяют строить математическую модель механического движения, которая обычно представляет собой дифференциальное уравнение.

Примеры.

1. Рассмотрим задачу установления закона изменения скорости падения тела $v(t)$, если на него действует сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости (коэффициент пропорциональности k.) По второму закону Ньютона имеем

$$ma = F$$

где $a-$ускорение , $F-$ сумма силы тяжести и силы сопротивления воздуха. Таким образом, имеем уравнение, связывающее искомую функцию $v(t)$ и ее производную

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

т. е. дифференциальное уравнение первого порядка.

2. Еще один пример диффереренциального уравнения возникает в задаче о колебание шарика, подвешенного на пружине и выведенного из положеия равновесия.

Обозначим через $x(t)$ отклонение шарика от положения равновесия в момент времени t. Используя второй закон Ньютона получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0,$$

где $\omega-$ некоторое число.

Решением этого уравнения является функция

$$x(t) = C_1 cos(\omega t) + C_2 sin(\omega t),$$

где C_1, C_2- произвольные постоянные.

3.Самым простым примером ОДУ является нахождение функции,производная которой равна самой функции.Тогда получим уравнение $y' = y$. Функция $y = Ce^x$, где произвольная постоянна,является общим решением этого уравнения.

Функция $y = 5e^x$ является частным решением, удовлетворяющая условию $y(0) = 5$.

4. Уравнение $y'^2 - xy' + xy - y^2 = 0$, уравнение, не разрешенное относительно y' .

5. Уравнение $x^2 y'' - y'^2 = 0$ является уравнением второго порядка

6. Уравнение $y'' - 4y + 5 = 0$ является линейным уравнением второго порядка с постоянными коэфициентами.

2. Задача Коши для уравнения первого порядка, начальные данные. Формулировка достаточных условий существования и единственности решения задачи Коши.

Уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \tag{3}$$

где $x-$ независимая переменная, y искомая функция,y' ее первая производная, называется дифференциальным уравнением первого порядка. Если уравнение (3) можно разрешить относительно y', то оно принимает вид

$$y' = f(x, y) \tag{4}$$

и называется уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.

Обычно если дифференциальное уравнение имеет решение, то оно имеет бесконечно много решений. Поэтому для получения конкретного решения требуется дополнительное условие.

Пусть R^2- евклидова плоскость с декартовыми координатами x, y, $G \subset R^2-$ область.Предположим,что $f(x, y)-$ непрерывная функция, определенная в области G.

Определим понятие решения дифференциального уравнения (4). Пусть X обозначает некоторый промежуток числовой прямой R с декартовой координатой . Промежуток X может представлять собой либо отрезок оси R, либо (ограниченный или неограниченный) интервал оси R, либо (ограниченный или неограниченный) полуинтервал оси R.

Определение. Функция $y = \varphi(x)$, определенная на промежутке X, называется решением дифференциального уравнения (1), если

1) $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную $\varphi^{'}(x)$ на промежутке X,

2) $(x, \varphi(x)) \in G$ при всех $\in X$,

3) $\varphi^{'}(x) \equiv f[x, \varphi(x)]$ на промежутке X.

Замечания. 1. Если промежуток X содержит левый или правый конец, то определение 1 требует существования непрерывной соответствующей односторонней производной $\varphi(x)$ в этой точке.

2. Из определения следует, что промежуток X необходимо лежит в проекции области G на ось R.

Процесс нахождения решений уравнения (4) иногда называют интегрированием дифференциального уравнения (1). Кривая в области G, являющаяся графиком некоторого решения уравнения (4), называется интегральной кривой дифференциального уравнения (1).

Решить уравнение (4) означает найти все решения уравнения (4).

Рассмотрим геометрический смысл задания уравнения (4) и его решения. С этой целью сопоставим каждой точке $(x_0, y_0) \in G$ вектор с координатами $1, f(x_0, y_0)$ отложенный от этой точки. Множество всех полученных векторов будем называть полем направлений, соответствующим уравнению (4). Из определения решения уравнения (4) и геометрического смысла производной следует, что кривая в области G является интегральной кривой уравнения (1) в том и только том случае, когда она гладкая и направление касательной в каждой ее точке совпадает с направлением поля в этой точке. Таким образом, в каждой точке $(x, y) \in G$ угол $\alpha = \alpha(,)$ наклона касательной к интегральной кривой (4) определяется уравнением $tg\alpha = f(x, y)$ (рис. 1).

Итак, задача интегрирования уравнения (4) геометрически эквивалентна нахождению всех гладких кривых в G, направление касательных к которым в каждой точке G совпадает с вектором поля направлений в данной точке. Это соображение используется для приближенного построения интегральных кривых. При практическом нахождении поля направлений для уравнения (4) удобно использовать так называемые изоклины. Изоклиной поля направлений уравнения (4) называют такую кривую в области G, во всех точках которой направления поля имеют одинаковый угловой коэффициент . Ясно, что изоклина задается уравнением $f(x, y) = k$. В простых случаях построение с помощью изоклин поля направлений позволяет сделать определенные выводы о поведении интегральных кривых уравнения (4).

Пример 1. Рассмотрим уравнение $y' = x + y$. Изоклинами являются параллельные прямые $x + y = k$. При $k = 0$ получаем изоклину $x + y = 0$, которая делит плоскость на две полуплоскости: в нижней полуплоскости интегральные кривые убывают, а в верхней полуплоскости они возрастают.

При $k = -1$ получаем изоклину $x + y = -1$, которая одновременно является и интегральной кривой, в чем можно убедиться подстановкой $y = -x - 1$ в уравнение.

Как следует из примеров введения и вышеприведенных геометрических соображений, за редким исключением разрешимое дифференциальное уравнение (1) имеет бесконечное множество решений. Таким исключением, например, является уравнение $y' = \sqrt{-y^2}$, которое имеет един ственное решение $y = 0$.

Поэтому в общем случае для получения какого- нибудь конкретного решения уравнения (1), кроме самого уравнения (1), необходимы еще дополнительные условия, выделяющие это конкретное решение из множества всех решений уравнения. Во многих случаях таким дополнительным условием для уравнения (4) является начальное условие

$$y(x_0) = y_0 \tag{5}$$

где $(x_0, y_0) \in G$. В силу него решение $y = \varphi(x)$ принимает в точке $x = x_0$ конкретное, заданное заранее значение $y = y_0$. Отыскание решения уравнения (4), удовлетворяющего условию (6) является одной из важнейших задач теории дифференциальных уравнений. Эта задача называется задачей Коши. С геометрической точки зрения решить ее - означает выделить из множества интегральных кривых ту, которая проходит через заданную точку (x_0, y_0) плоскости OXY. Точки плоскости, через которые проходит более одной интегральной кривой, либо не проходит ни одной интегральной кривой, называются особыми точками данного уравнения.

Теорема существования и единственности. Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема по y и функции $f(x, y)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в области G, $(x_0, y_0) \in G$. Тогда

1) Существует число такое $\delta > 0$, что решение $y = \varphi(x)$ задачи (4),(5) существует для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta$.

2) Если $y = \varphi_1(x)$, $x \in I_1$, $y = \varphi_2(x)$, $x \in I_2$ два решения задачи Крши, то $y_1(x) = y_2(x)$ для всех $x \in I_1 \bigcap I_2$.

ПРИМЕРЫ.

1) Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}}.$$

Имеем

$$f(x, y) = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}}.$$

Во всех точках плоскости xOy функция $f(x, y)$ определена и непрерывна. Однако в точках $(x, 0)$ производная функции $\frac{\partial f}{\partial y}$ не является непрерывной. Так как в точках оси Ох нарушается условие теоремы, то возможно нарушение единственности решения. Легко проверить, что функция

$$y = \frac{(x + C)^2}{8}$$

является общим решением данного уравнения. Кроме того, очевидно, что уравнение имеет решение $y = 0$. Таким образом, через каждую точку $(x_0, 0))$ проходит две интегральные кривые.

2). Рассмотрим уравнение первого порядка $y' = -\frac{y}{x}$.

Функции $\frac{y}{x}$, $-\frac{1}{x}$ непрерывны при $x \neq 0$. Следовательно, это уравнение удовлетворяет условиям теоремы Коши при $x \neq 0$.

Общим решением уравнения в областях $x > 0$ и $x < 0$ является функция $y = -\frac{C}{x}$, где $C-$ произвольная постоянная. Частное решение, удовлетворяющее, начальным условиям:$x_0 = 1$, $_0 = 1$ имеет вид: $y = -\frac{1}{x}$.

Геометрически общее решение данного ДУ есть семейство гипербол, каждая из которых изображает частные решения данного уравнения. Заметим, все точки оси ОУ представляют собой особые точки данного дифференциального уравнения.

В некоторых случаях уравнение (4) удобно записать в виде: $dy/dx = f(x, y)$ или в виде $f(x, y)dx = dy$, что является частным случаем уравнения более общего вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{6}$$

где $P(x, y), Q(x, y)$ известные функции. Такое уравнение в симметричной форме (5) удобно тем, что переменные x и y в нем равноправны, то есть каждую из них можно рассматривать как функцию другой. Уравнение удобнее уравнения , так как переменные равноправны.

Здесь будем предполагать, что $P(x, y), Q(x, y)$- заданные непрерывные функции в области G и что $|P(x_0, y_0)| + |Q(x_0, y_0)| > 0$ Для каждой точки $(x_0, y_0) \in G$.

Уравнение (4) является частным случаем уравнения (6), когда $P(x, y) \equiv f(x, y)$, $Q(x, y) \equiv -1$.

Для уравнения (6) можно дать определение решения аналогично определению решения для уравнения (4). Однако более целесообразно расширить понятие решения, рассмотрев так называемые параметрические решения.

Определение -4. Функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ на некотором промежутке I числовой оси R_i^1 задают параметрическое решение уравнения (6), если:

1) функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ - непрерывно дифференцируемые и $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 > 0$ для всех $t \in I$,

2) $(\varphi(t), \psi(t)) \in G$ для всех $t \in I$,

3) $P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t) \equiv 0$ на всем промежутке I.

Кривая в области G, являющаяся непрерывным образом промежутка I при отображении $(\varphi(t), \psi(t))$называется (параметрической) интегральной кривой уравнения (6).

Из определения решения немедленно следует, что интегральная кривая уравнения (6) является гладкой кривой. Если $\varphi'(t_0) \neq 0$ для некоторого $t_0 \in I$, то найдется интервал $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $\delta > 0$, на котором $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, и тогда кусок интегральной кривой, соответствующий изменению t в интервале $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ определяется уравнением $y = \chi(x) \equiv \psi[\varphi^{-1}(x)]$.

Если $\psi'(t_1) \neq 0$ для некоторого $t_1 \in I$, то найдется интервал $(t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1)$, $\delta_1 > 0$, на котором $= \psi(t)$ имеет обратную функцию $t = \psi^{-1}()$, и тогда кусок интегральной кривой, соответствующий $t \in (t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1)$, определяется уравнением $= \omega() \equiv \varphi[\psi^{-1}(y)]$.

Отсюда следует, что интегральная кривая уравнения (6), в отличие от интегральной кривой уравнения (4), в общем случае представляет собой гладкую кривую, отдельные куски которой задаются или функцией вида $= \chi()$ или функцией вида $= \omega()$. Соответственно этому уравнение (6) допускает как решения вида $= \chi()$ так и решения вида $x = \omega()$, заданных явно, неявно или параметрически. В частности, из определения параметрического решения уравнения (6) при $x = t$ получаем решение вида $y = \psi(x)$, а при $y = t$ получаем решение вида $x = \varphi()$.

Интегральная кривая Γ в дифференциалах может быть задана уравнением $F(x, y) = 0$, при этом выполнены условия:

1. Функция F имеет непрерывные частные производное $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$, которые в точках кривой не обращаются в нуль одновременно;

2. $M(x, y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) - N(x, y) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0$ во всех точках кривой .

Геометрически это означает, что касательная к кривой в каждой ее точке (x, y) имеет направление, задаваемое вектором с координитами $(M(x, y), N(x, y))$.

Связь между уравнением вида 6 и рассмотренным ранее уравнением вида (4) заключается в следующем.

1) Если функция $\varphi : I \to \mathbf{R}$ является решением уравнения

$$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y),} \tag{7}$$

то ее график

$$\Gamma_\varphi = \{(x, y) | x \in I, y = \varphi(x)\},$$

задаваемый уравнением $y - \varphi(x) = 0$, является решением уравнения (6) .

2) Если кривая является решением уравнения (6) и имеет в точке $(x_0, y_0) \in$ невертикальную касательную, то существует такая окрестность U этой точки, что множество $\Gamma \bigcap U$ есть график некоторой функции $y = \varphi(x)$, являющейся решением уравнения (7).

3) Аналогично,в некоторой окресности точки, в которой касательная негоризонтальна, решение уравнения (6) представляет собой график некоторой функции $x = \psi(y)$, являющейся решением уравнения

$$x' = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)},$$

где $x' = \frac{dx}{dy}$.

Однако,как видно из приведенного ниже примера, уравнение вида (6) может иметь в качестве решений кривые, не являющиеся (в целом) графиками функций $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$.

Замечание. Иногда уравнение (6) может быть задано не только в области G, но и на ее границе. Тогда всякая граничная точка относится к так называемым особым точкам уравнения (6). Поведение интегральных кривых (6) в окрестности границы G требует отдельного рассмотрения.

В каждой точке $(x, y) \in G$ уравнение (6) определяет вектор с компонентами $-Q(x, y), P(x, y)$. Эти вектора задают поле направлений в области G, порождаемого уравнением (6). Как и в случае уравнения (4), гладкая кривая в G будет интегральной кривой уравнения (6) тогда и только тогда, когда направление касательной в каждой ее точке совпадает с вектором поля в данной точке.

Поле направлений уравнения (6) богаче поля направлений уравнения (4), так как, например, оно может содержать вертикальные направления, что запрещено для поля направлений уравнения (4). Как уже отмечалось ранее, структура интегральных кривых уравнения (6) может быть более сложной, чем для уравнения (4).

Например, интегральные кривые уравнения (6) могут иметь вертикальные касательные, быть замкнутыми кривыми. В силу условий на коэффициенты и Q уравнения (6) из рассмотрения исключены те точки $(x_0, y_0) \in G$, в которых $P(x_0, y_0) = Q(_0, y_0) = 0$. Такие точки называют особыми точками уравнения (6).

В силу непрерывности P и Q множество особых точек уравнения (6) всегда замкнуто, однако особые точки (6) не обязаны всегда быть изолированными. Они могут заполнять целую линию, называемую особой линией (например, прямая $y = x$ - особая линия уравнения $(- x)(xdx + ydy) = 0))$ или образовывать множество более сложной структуры. Особые линии могут определять так называемые особые решения (3).

В силу того, что переменные x, y равноправны в уравнении (6), для него удобно ставить задачу Коши в геометрических терминах.

Задача Коши для (6). Найти интегральную кривую уравнения (6), проходящую через заданную точку $(x_0, y_0) \in G$.

Если $Q(x_0, y_0) \neq 0$, $(x_0, y_0) \in G$, то можно установить в некоторой окрестности (x_0, y_0) эквивалентность уравнений (6) и (4).

Тем самым изучение задачи Коши для уравнения (6) сводится в такой окрестности к изучению задачи Коши для уравнения (4).

Пример-1.Рассмотрим уравнение в симметричной форме

$$xdx + ydy = 0.$$

Параметрическое решение этого уравнения задаются функциями

$$x(t) = C_1cost - C_2sint, y(t) = C_1sint + C_2cost.$$

Интегральная кривая уравнения, проходящая через заданную точку $(x_0, y_0) \in G$ задаются уравнениями.

$$x(t) = x_0cost - y(t)sint, y(t) = x_0sint + y_0cost.$$

Уравнение $x^2 + y^2 = C$ задает интегральную кривую этого уравнения. Действительно,частные производные

$$\frac{\partial(x^2 + y^2 - C)}{\partial x} = 2x$$

и

$$\frac{\partial(x^2 + y^2 - C)}{\partial y} = 2y$$

непрерывны и обращаются в нуль одновременно только в точке $(0,0)$, которая не удовлетворяет уравнению кривой. Далее,

$$x \cdot 2y - y \cdot 2x \equiv 0.$$

Пример-2.Рассмотрим уравнение в симметричной форме

$$ydx + xdy = 0.$$

Функции

$$x = C_1 e^{-t}, y = C_2 e^{t}$$

задают решение в параметрической форме.

Интегральная кривая уравнения, проходящая через заданную точку $(x_0, y_0) \in G$ задаются уравнениями

$$x = x_0 e^{-t}, y = y_0 e^{t}.$$

Уравнение $\frac{C}{x} - y = 0$ задает интегральную кривую этого уравнения. Действительно,частные производные

$$\frac{\partial(\frac{C}{x} - y)}{\partial x} = -\frac{C}{x^2}$$

и

$$\frac{\partial(\frac{C}{x} - y =)}{\partial y} = -1$$

непрерывны и не обращаются в нуль одновременно и

$$-y(-1) + x(-\frac{C}{x^2}) = 0.$$

Пример-3. В некоторых случаях левая часть уравнения (6) является дифференциалом некоторой функции,т.е.существует функция $F(x,y)$ такая,что

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$$

и

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y).$$

В этом случае уравнение (6) может быть написано в виде

$$dF(x,y) = 0$$

и интегральная кривая задается уравнением $F(x,y) = c$.

Рассмотрим уравнение

$$(x + \sin y)dx + (x \cos y - 2y)dy = 0, \tag{8}$$

где

$$P(x,y) = x + \sin x, Q(x,y) = x \cos y - 2y.$$

Можно проверить, что

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \cos y,$$

и данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Для нахождения функции $F(x,y)$ воспользуемся равенствами

$$F_x(x,y) = x + \sin y, F_y(x,y) = x\cos y - 2y.$$

Проинтегрируем первое уравнение по x

$$\int F_x(x,y)dx = \int (x + \sin y)dx$$

получим, что

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x\sin y + h(y),$$

где слагаемое $h(y)$ зависит только от y. Для нахождения $h(y)$ подставим полученное выражение для $F(x,y)$ в равенство

$$F_y(x,y) = x\cos y - 2y.$$

и находим,что

$$(\frac{1}{2}x^2 + x\sin y + h(y))'_y = x\cos y - 2y$$

$$x\cos y + h'(y) = x\cos y - 2y$$

В результате мы имеем, что

$$h'(y) = -2y, h(y) = -y^2.$$

Таким образом мы нашли функцию

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x\sin y - y^2,$$

дифференциал которой является левой частью уравнения (8), интегральная кривая этого уравнения задается уравнением

$$\frac{1}{2}x^2 + x\sin y - y^2 = C.$$

Рекомендуемая литература

1. Бухарова Т.И. и др. Курс лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: НИЯУ МИФИ, 2011.
2. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М., 2004.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., 2004.