Лекция №1

§ 1. Понятие множества. Операции над миожествами

1. Основные определения. В математике встречаются самые разнообразные *множества.* Можно говорить о множестве граней многогранника, точек на прямой, множестве натуральных чисел и т. д. Понятие множества настолько общее, что трудно дать ему какое-либо определение, которое не сводилось бы просто к замене слова «множество» его синонимами: совокупность, собрание элементов и т. п.

Роль, которую понятие множества играет в современной математике, определяется не только тем, что сама теория множеств стала в настоящее время весьма обширной и содержательной дисциплиной, но главным образом тем влиянием, которое теория множеств, возникшая в конце прошлого столетия, оказывала и оказывает на всю математику в целом. Не ставя своей задачей сколько-нибудь полное изложение этой теории, мы здесь лишь введем основные обозначения и приведем первоначальные теоретико-множественные понятия, используемые в дальнейшем.

Множества мы будем обозначать прописными буквами A, B, ..., а их элементы — малыми a, b, ... Утверждение «элемент a принадлежит множеству A» символически записывается так: $a \in A$ (или $A \ni a$); запись $a \notin A$ (или $A \not\ni a$) означает, что элемент a не принадлежит A. Если все элементы, из которых состоит A, входят и в B (причем случай $A = B$ не исключается), то мы называем A *подмножеством* множества B и пишем $A \subset B$. Например, целые числа образуют подмножество в множестве всех действительных чисел.

Иногда мы не знаем заранее, содержит ли некое множество (например, множество корней данного уравнения) хотя бы один элемент. Поэтому целесообразно ввести понятие *пустого* множества, т. е. множества, не содержащего ни одного элемента. Мы будем обозначать его символом $\varnothing$. Любое множество содержит $\varnothing$ в качестве подмножества. Подмножества некоторого множества, отличные от него самого и от $\varnothing$, называются *собственными.*

2. Операции над множествами. Пусть A и B — произвольные множества; их *суммой*, или *объединением* $C = A \cup B$ называется

множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из миожеств A и B (рис. 1).

Аналогично определяется сумма любого (конечного или бесконечного) числа множеств: если A_α — произвольные множества, то их сумма $\bigcup_\alpha A_\alpha$ есть совокупность элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A_α.

Назовем *пересечением* $C = A \cap B$ множеств A и B множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так

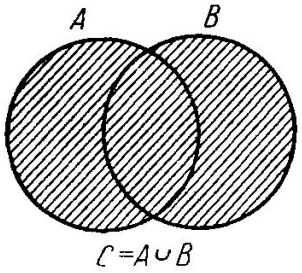


Рис. 1.

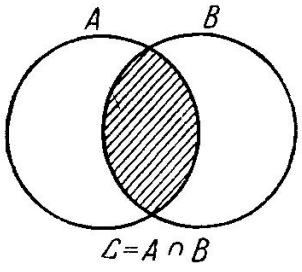


Рис. 2.

и B (рис. 2). Например, пересечение множества всех четных чисел и множества всех чисел, делящихся на три, состоит из всех целых чисел, делящихся без остатка на шесть. Пересечением любого (конечного или бесконечного) числа множеств A_α называется совокупность $\bigcap_\alpha A_\alpha$ элементов, принадлежащих каждому из множеств A_α.

Операции сложения и пересечения множеств по самому своему определению коммутативны и ассоциативны, т. е.

$$A \cup B = B \cup A, \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$A \cap B = B \cap A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Кроме того, они взаимно дистрибутивны:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \tag{1}$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \tag{2}$$

Действительно, проверим, например, первое из этих равенств[1]). Пусть элемент x принадлежит множеству, стоящему в левой части равенства (1), т. е. $x \in (A \cup B) \cap C$. Это означает, что x входит в C и, кроме того, по крайней мере в одно из множеств A или B. Но тогда x принадлежит хотя бы одному из множеств $A \cap C$ или $B \cap C$, т. е. входит в правую часть рассматриваемого равенства. Обратно, пусть $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Тогда

[1]) Равенство двух множеств $A = B$ понимается как тождественное равенство, т. е. оно означает, что каждый элемент множества A принадлежит B, и наоборот. Иначе говоря, равенство $A = B$ равносильно тому, что выполнены оба включения: $A \subset B$ и $B \subset A$.

$x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C$. Следовательно, $x \in C$ и, кроме того, x входит в A или B, т. е. $x \in A \cup B$. Таким образом, $x \in (A \cup B) \cap C$. Равенство (1) доказано. Аналогично проверяется равенство (2).

Определим для множеств операцию вычитания. Мы назовем *разностью* $C = A \setminus B$ множеств A и B совокупность тех элементов из A, которые не содержатся в B (рис. 3). При этом, вообще

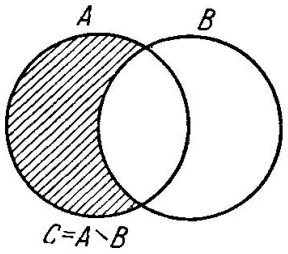


Рис. 3.

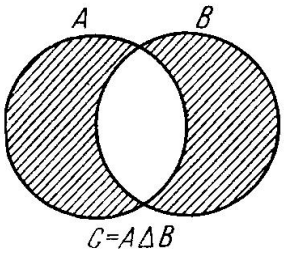


Рис. 4.

говоря, не предполагается, что $A \supset B$. Вместо $A \setminus B$ иногда пишут $A - B$.

Иногда (например, в теории меры) удобно рассматривать так называемую *симметрическую разность* двух множеств A и B, которая определяется как сумма разностей $A \setminus B$ и $B \setminus A$ (рис. 4). Симметрическую разность C множеств A и B мы будем обозначать символом $A \triangle B$. Таким образом, по определению,

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Упражнение. Показать, что

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Часто приходится рассматривать тот или иной запас множеств, являющихся подмножествами некоторого основного множества S, например, различные множества точек на числовой прямой. В этом случае разность $S \setminus A$ называют *дополнением* множества A и обозначают CA или A'.

В теории множеств и ее приложениях весьма важную роль играет так называемый принцип двойственности, который основан на следующих двух соотношениях:

1. *Дополнение суммы равно пересечению дополнений*

$$S \setminus \bigcup_{\alpha} A_\alpha = \bigcap_{\alpha} (S \setminus A_\alpha). \tag{3}$$

2. *Дополнение пересечения равно сумме дополнений*

$$S \setminus \bigcap_{\alpha} A_\alpha = \bigcup_{\alpha} (S \setminus A_\alpha). \tag{4}$$

Принцип двойственности состоит в том, что из любого равенства, относящегося к системе подмножеств фиксированного множества S, совершенно автоматически может быть получено другое — двойственное — равенство путем замены всех рассматриваемых множеств их дополнениями, сумм множеств — пересечениями, а пересечений — суммами. Примером использования этого принципа может служить вывод теоремы 3′ из теоремы 3 § 2 гл. II.

Приведем доказательство соотношения (3).

Пусть $x \in S \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha$. Это означает, что x не входит в объединение $\bigcup_\alpha A_\alpha$, т. е. не входит ни в одно из множеств A_α. Следовательно, x принадлежит каждому из дополнений $S \setminus A_\alpha$ и потому $x \in \bigcap_\alpha (S \setminus A_\alpha)$. Обратно, пусть $x \in \bigcap_\alpha (S \setminus A_\alpha)$, т. е. x входит в каждое $S \setminus A_\alpha$; тогда x не входит ни в одно из множеств A_α, т. е. не принадлежит их сумме $\bigcup_\alpha A_\alpha$, а тогда $x \in S \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha$. Равенство (3) доказано. Соотношение (4) доказывается аналогично. (Проведите доказательство.)

Название «симметрическая разность» для операции $A \triangle B$ не совсем удачно; эта операция во многом аналогична операции взятия суммы множеств $A \cup B$. Действительно, $A \cup B$ означает, что мы связываем *неисключающим* «или» два утверждения: «элемент принадлежит A» и «элемент принадлежит B», а $A \triangle B$ означает, что те же самые два утверждения связываются *исключающим* «или»: элемент x принадлежит $A \triangle B$ тогда и только тогда, когда он принадлежит либо *только* A, либо *только* B. Множество $A \triangle B$ можно было бы назвать «суммой по модулю два» множеств A и B (берется объединение этих двух множеств, но элементы, которые при этом встречаются дважды, выбрасываются).

§ 2. Отображения. Разбиения на классы

1. Отображение множеств. Общее понятие функции. В анализе понятие функции вводится следующим образом. Пусть X — некоторое множество на числовой прямой. Говорят, что на этом множестве определена функция f, если каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие определенное число $y = f(x)$. При этом X называется *областью определения* данной функции, а Y — совокупность всех значений, принимаемых этой функцией, — ее *областью значений.*

Если же вместо числовых рассматривать множества какой угодно природы, то мы придем к самому общему понятию функции. Пусть M и N — два произвольных множества. Говорят, что на M определена функция f, принимающая значения из N, если каждому элементу $x \in M$ поставлен в соответствие один и только один элемент y из N. Для множеств произвольной природы (как, впрочем, и в случае числовых множеств) вместо термина

«функция» часто пользуются термином «отображение», говоря об отображении одного множества в другое. При специализации природы множеств M и N возникают специальные типы функций, которые носят особые названия «вектор-функция», «мера», «функционал», «оператор» и т. д. Мы столкнемся с ними в дальнейшем.

Для обозначения функции (отображения) из M в N мы будем часто пользоваться записью $f\colon M \to N$.

Если a — элемент из M, то отвечающий ему элемент $b=f(a)$ из N называется его *образом* (при отображении f). Совокупность всех тех элементов a из M, образом которых является данный элемент $b \in N$, называется *прообразом* (или, точнее *полным прообразом*) элемента b и обозначается $f^{-1}(b)$.

Пусть A — некоторое множество из M; совокупность $\{f(a): a \in A\}$ всех элементов вида $f(a)$, где $a \in A$, называется *образом* A и обозначается $f(A)$. В свою очередь для каждого множества B из N определяется его (полный!) прообраз $f^{-1}(B)$, а именно: $f^{-1}(B)$ есть совокупность всех тех элементов из M, образы которых принадлежат B. Может оказаться, что ни один элемент b из B не имеет непустого прообраза, тогда и прообраз $f^{-1}(B)$ будет пустым множеством.

Здесь мы ограничимся рассмотрением самых общих свойств отображений.

Введем следующую терминологию. Мы будем говорить, что f есть отображение множества M «на» множество N, если $f(M)=N$; такое отображение называют также *сюръекцией*. В общем случае, т. е. когда $f(M) \subset N$, говорят, что f есть отображение M «в» N.

Если для любых двух различных элементов x_1 и x_2 из M их образы $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ также различны, то f называется *инъекцией*. Отображение $f: M \to N$, которое одновременно является сюръекцией и инъекцией, называется *биекцией* или *взаимно однозначным соответствием между M и N*.

Установим основные свойства отображений.

Теорема 1. *Прообраз суммы двух множеств равен сумме их прообразов*:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Доказательство. Пусть элемент x принадлежит множеству $f^{-1}(A \cup B)$. Это означает, что $f(x) \in A \cup B$, т. е. $f(x) \in A$ или $f(x) \in B$. Но тогда x принадлежит по крайней мере одному из множеств $f^{-1}(A)$ или $f^{-1}(B)$, т. е. $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Обратно, если $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, то x принадлежит по крайней мере одному из множеств $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$, т. е. $f(x)$ принадлежит хотя бы одному из множеств A или B, следовательно, $f(x) \in A \cup B$, но тогда $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

Теорема 2. *Прообраз пересечения двух множеств равен пересечению их прообразов*:

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Доказательство. Если $x \in f^{-1}(A \cap B)$, то $f(x) \in A \cap B$, т. е. $f(x) \in A$ и $f(x) \in B$, следовательно, $x \in f^{-1}(A)$ и $x \in f^{-1}(B)$, т. е. $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Обратно, если $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, т. е. $x \in f^{-1}(A)$ и $x \in f^{-1}(B)$, то $f(x) \in A$ и $f(x) \in B$. Иначе говоря, $f(x) \in A \cap B$. Следовательно, $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

Теоремы 1 и 2 остаются в силе для сумм и пересечений любого (конечного или бесконечного) числа множеств так же, как и следующая теорема.

Теорема 3. *Образ суммы двух множеств равен сумме их образов*:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Доказательство. Если $y \in f(A \cup B)$, то это означает, что $y = f(x)$, где x принадлежит по крайней мере одному из множеств A и B. Следовательно, $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Обратно, если $y \in f(A) \cup f(B)$, то $y = f(x)$, где x принадлежит по крайней мере одному из множеств A и B, т. е. $x \in A \cup B$ и, следовательно, $y = f(x) \in f(A \cup B)$.

Заметим, что *образ пересечения двух множеств, вообще говоря, не совпадает с пересечением их образов.* Например, пусть рассматриваемое отображение представляет собой проектирование плоскости на ось x. Тогда отрезки

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y = 0,$$
$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y = 1$$

не пересекаются, а в то же время их образы совпадают.

Упражнение. Докажите, что прообраз дополнения равен дополнению прообраза. Верно ли аналогичное утверждение для образа дополнения?

2. Разбиение на классы. Отношения эквивалентности. В самых различных вопросах встречаются разбиения тех или иных множеств на попарно непересекающиеся подмножества. Например, плоскость (рассматриваемую как множество точек) можно разбить на прямые, параллельные оси x, трехмерное пространство можно представить как объединение концентрических сфер различных радиусов (начиная с $r = 0$), жителей данного города можно разбить на группы по их году рождения и т. п.

Каждый раз, когда некоторое множество M представлено тем или иным способом как сумма своих попарно непересекающихся подмножеств, мы говорим *о разбиении множества M на классы.*

Обычно приходится иметь дело с разбиениями, построенными на базе того или иного признака, по которому элементы множества M объединяются в классы. Например, множество всех треугольников на плоскости можно разбить на классы равных между собой или на классы равновеликих треугольников, все функции от x можно разбить на классы, собирая в один класс функции, принимающие в данной точке одинаковые значения, и т. д.

Признаки, по которым элементы множества разбиваются на классы, могут быть самыми разнообразными. Но все же такой признак не вполне произволен. Предположим, например, что мы захотели бы разбить все действительные числа на классы, включая число b в тот же класс, что и число a, в том и только в том случае, когда $b > a$. Ясно, что никакого разбиения действительных чисел на классы таким путем получить нельзя, так как если $b > a$, т. е. если b следует зачислить в тот же класс, что и a, то $a < b$, т. е. число a *нельзя* включить в тот же класс, что и b. Кроме того, так как a не больше, чем само a, то a *не должно попасть* в один класс с самим собой! Другой пример. Попробуем разбить точки плоскости на классы, относя две точки к одному классу в том и только том случае, когда расстояние между ними меньше 1. Ясно, что добиться этого нельзя, так как если расстояние от a до b меньше 1 и расстояние от b до c меньше 1, то это вовсе не означает, что расстояние от a до c меньше 1. Таким образом, зачисляя a в один класс с b, а b в один класс с c, мы получим, что в один и тот же класс могут попасть две точки, расстояние между которыми больше 1.

Приведенные примеры подсказывают условия, при которых тот или иной признак действительно позволяет разбить элементы некоторого множества на классы.

Пусть M — некоторое множество и пусть некоторые из пар (a, b) элементов этого множества являются «отмеченными» [1]). Если (a, b) — «отмеченная» пара, то мы будем говорить, что элемент a связан с b отношением φ, и обозначать это символом $a \underset{\varphi}{\sim} b$. Например, если имеется в виду разбиение треугольников на классы равновеликих, то $a \underset{\varphi}{\sim} b$ означает «треугольник a имеет ту же площадь, что и треугольник b». Данное отношение φ называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает следующими свойствами:

1. Рефлексивность: $a \underset{\varphi}{\sim} a$ для любого элемента $a \in M$.
2. Симметричность: если $a \underset{\varphi}{\sim} b$, то $b \underset{\varphi}{\sim} a$.
3. Транзитивность: если $a \underset{\varphi}{\sim} b$ и $b \underset{\varphi}{\sim} c$, то $a \underset{\varphi}{\sim} c$.

---

[1]) При этом элементы a и b берутся в определенном порядке, т. е. (a, b) и (b, a) — две, вообще говоря, различные пары.

Эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы отношение φ (признак!) позволяло разбить множество M на классы. В самом деле, в с я к о е разбиение данного множества на классы определяет между элементами этого множества некоторое отношение эквивалентности. Действительно, если $a \underset{\varphi}{\sim} b$ означает «a находится в том же классе, что и b», то отношение φ будет, как легко проверить, рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Обратно, пусть φ — некоторое отношение эквивалентности между элементами множества M и K_a — класс элементов x из M, эквивалентных данному элементу a: $x \underset{\varphi}{\sim} a$. В силу свойства рефлексивности элемент a сам принадлежит классу K_a. Покажем, что два класса K_a и K_b либо совпадают, либо не пересекаются. Пусть некоторый элемент c принадлежит одновременно и K_a и K_b, т. е. $c \underset{\varphi}{\sim} a$ и $c \underset{\varphi}{\sim} b$. Тогда в силу симметричности $a \underset{\varphi}{\sim} c$ и в силу транзитивности

$$a \underset{\varphi}{\sim} b. \qquad (1)$$

Если теперь x — произвольный элемент из K_a, т. е. $x \underset{\varphi}{\sim} a$, то в силу (1) и свойства транзитивности $x \underset{\varphi}{\sim} b$, т. е. $x \in K_b$.

Точно так же доказывается, что всякий элемент $y \in K_b$ входит в K_a. Таким образом, два класса K_a и K_b, имеющих хотя бы один общий элемент, совпадают между собой. Мы получили разбиение множества M на классы по заданному отношению эквивалентности.

Понятие разбиения множества на классы тесно связано с рассмотренным в предыдущем пункте понятием отображения.

Пусть f — отображение множества A в множество B. Собрав в один класс все те элементы из A, образы которых в B совпадают, мы получим, очевидно, некоторое разбиение множества A. Обратно, рассмотрим произвольное множество A и некоторое его разбиение на классы. Пусть B — совокупность тех классов, на которые разбито множество A. Ставя в соответствие каждому элементу $a \in A$ тот класс (т. е. тот элемент из B), к которому a принадлежит, мы получим отображение множества A на множество B.

П р и м е р ы. 1. Спроектируем плоскость xy на ось x. Прообразы точек оси x — вертикальные прямые. Следовательно, этому отображению отвечает разбиение плоскости на параллельные прямые.

2. Разобьем все точки трехмерного пространства на классы, объединив в один класс точки, равноудаленные от начала координат. Каждый класс представляет собой сферу некоторого радиуса. Совокупность всех этих классов можно отождествить с множеством всех точек, лежащих на луче $[0, \infty)$. Итак, разбие-

нию трехмерного пространства на концентрические сферы отвечает отображение этого пространства на полупрямую.

3. Объединим в один класс все действительные числа с одинаковой дробной частью. Этому разбиению отвечает отображение прямой линии на окружность единичной длины.

Понятие эквивалентности является частным случаем более общего понятия бинарного отношения. Пусть M — произвольное множество. Обозначим через $M \times M$ или M^2 совокупность всех упорядоченных пар (a, b), где $a, b \in M$. Говорят, что в M задано *бинарное отношение* φ, если в M^2 выделено произвольное подмножество R_φ. Точнее говоря, мы скажем, что элемент a находится в отношении φ к элементу b — обозначение $a\varphi b$ — в том и только том случае, когда пара (a, b) принадлежит R_φ. Примером бинарного отношения может служить отношение тождества ε; именно, $a\varepsilon b$ в том и только том случае, если $a = b$; иначе говоря, это — отношение, задаваемое диагональю Δ в $M \times M$, т. е. подмножеством пар вида (a, a). Ясно, что всякое отношение эквивалентности φ в некотором множестве M есть бинарное отношение, подчиненное следующим условиям:

1) Диагональ Δ принадлежит R_φ (рефлексивность).

2) Если $(a, b) \in R_\varphi$, то и $(b, a) \in R_\varphi$ (симметричность).

3) Если $(a, b) \in R_\varphi$ и $(b, c) \in R_\varphi$, то и $(a, c) \in R_\varphi$ (транзитивность).

Итак, эквивалентность — это бинарное отношение, удовлетворяющее условиям рефлексивности, транзитивности и симметричности. В § 4 мы рассмотрим другой важный частный случай бинарного отношения — частичную упорядоченность.

§ 3. Эквивалентность множеств. Понятие мощности множества

1. Конечные и бесконечные множества. Рассматривая различные множества, мы замечаем, что иногда можно, если не фактически, то хотя бы примерно, указать число элементов в данном множестве. Таковы, например, множество всех вершин некоторого многогранника, множество всех простых чисел, не превосходящих данного числа, множество всех молекул воды на Земле и т. д. Каждое из этих множеств содержит конечное, хотя, быть может, и неизвестное нам число элементов. С другой стороны, существуют множества, состоящие из бесконечного числа элементов. Таково, например, множество всех натуральных чисел, множество всех точек на прямой, всех кругов на плоскости, всех многочленов с рациональными коэффициентами и т. д. При этом, говоря, что множество бесконечно, мы имеем в виду, что из него можно извлечь один элемент, два элемента и т. д., причем после каждого такого шага в этом множестве еще останутся элементы.

Два конечных множества мы можем сравнивать по числу элементов и судить, одинаково это число или же в одном из множеств элементов больше, чем в другом. Спрашивается, можно ли подобным же образом сравнивать бесконечные множества? Иначе говоря, имеет ли смысл, например, вопрос о том, чего больше: кругов на плоскости или рациональных точек на прямой, функций, определенных на отрезке [0, 1], или прямых в пространстве, и т. д.?

Посмотрим, как мы сравниваем между собой два конечных множества. Можно, например, сосчитать число элементов в каждом из них и, таким образом, эти два множества сравнить. Но можно поступить и иначе, именно, попытаться установить *биекцию*, т. е. взаимно однозначное соответствие между элементами этих множеств, иначе говоря, такое соответствие, при котором каждому элементу одного множества отвечает один и только один элемент другого, и наоборот. Ясно, что взаимно однозначное соответствие между двумя конечными множествами можно установить тогда и только тогда, когда число элементов в них одинаково. Например, чтобы проверить, одинаково ли число студентов в группе и стульев в аудитории, можно, не пересчитывая ни тех, ни других, посадить каждого студента на определенный стул. Если мест хватит всем и не останется ни одного лишнего стула, т. е. если будет установлена биекция между этими двумя множествами, то это и будет означать, что число элементов в них одинаково.

Заметим теперь, что если первый способ (подсчет числа элементов) годится лишь для сравнения к о н е ч н ы х множеств, второй (установление взаимно однозначного соответствия) пригоден и для б е с к о н е ч н ы х.

2. Счетные множества. Простейшим среди бесконечных множеств является множество натуральных чисел. Назовем *счетным множеством* всякое множество, элементы которого можно биективно сопоставить со всеми натуральными числами. Иначе говоря, счетное множество — это такое множество, элементы которого можно занумеровать в бесконечную последовательность: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Приведем примеры счетных множеств.

1. *Множество всех целых чисел.* Установим соответствие между всеми целыми и всеми натуральными числами по следующей схеме:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \ldots, \\ 1 & & 2 & 3 & & 4 & 5 & \ldots, \end{array}$$

вообще, неотрицательному числу $n \geqslant 0$ сопоставим нечетное число $2n+1$, а отрицательному $n < 0$ — четное число $2|n|$:

$$n \leftrightarrow 2n+1 \text{ при } n \geqslant 0,$$
$$n \leftrightarrow 2|n| \text{ при } n < 0.$$

2. *Множество всех четных положительных чисел.* Соответствие очевидно: $n \leftrightarrow 2n$.

3. *Множество* 2, 4, 8, ..., 2^n, ... *степеней числа* 2. Здесь соответствие также очевидно. Каждому числу 2^n сопоставляется число n.

4. Рассмотрим более сложный пример, а именно, покажем, что *множество всех рациональных чисел* счетно. Каждое рациональное число однозначно записывается в виде несократимой дроби $\alpha = p/q$, $q > 0$. Назовем сумму $|p| + q$ *высотой* рационального числа α. Ясно, что число дробей с данной высотой n конечно. Например, высоту 1 имеет только число 0/1, высоту 2 — числа 1/1 и —1/1, высоту 3 — числа 2/1, 1/2, —2/1 и —1/2 и т. д. Будем нумеровать все рациональные числа по возрастанию высоты, т. е. сперва выпишем числа высоты 1, потом — числа высоты 2 и т. д. При этом всякое рациональное число получит некоторый номер, т. е. будет установлено взаимно однозначное соответствие между всеми натуральными и всеми рациональными числами.

Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется *несчетным* множеством.

Установим некоторые общие свойства счетных множеств.

1. *Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.*

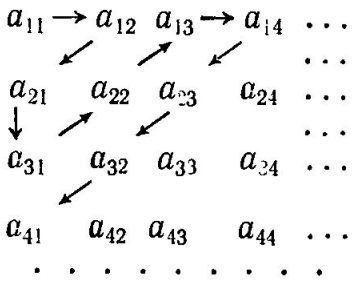
Доказательство. Пусть A — счетное множество, а B — его подмножество. Занумеруем элементы множества A: $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ Пусть $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ — те из них, которые входят в B. Если среди чисел $n_1, n_2, \ldots$ есть наибольшее, то B конечно, в противном случае B счетно, поскольку его члены $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ занумерованы числами 1, 2, ...

2. *Сумма любого конечного или счетного множества счетных множеств есть снова счетное множество.*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — счетные множества. Мы можем считать, что они попарно не пересекаются, так как иначе мы рассмотрели бы вместо них множества A_1, $A_2 \setminus A_1$, $A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, ... — каждое из которых не более чем счетно, — имеющие ту же самую сумму, что и множества $A_1, A_2, \ldots$ Все элементы множеств $A_1, A_2, \ldots$ можно записать в виде следующей бесконечной таблицы:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \ldots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array},$$

где в первой строке стоят элементы множества A_1, во второй — элементы множества A_2 и т. д. Занумеруем теперь все эти элементы «по диагоналям», т. е. за первый элемент примем a_{11}, за второй a_{12}, за третий a_{21} и т. д., двигаясь в порядке, указанном стрелками на следующей таблице:



Ясно, что при этом каждый элемент каждого из множеств получит определенный номер, т. е. будет установлено взаимно однозначное соответствие между всеми элементами всех множеств A_1, A_2, ... и всеми натуральными числами. Наше утверждение доказано.

Упражнения. Доказать, что множество всех многочленов с рациональными коэффициентами счетно.

2. Число ξ называется *алгебраическим*, если оно является корием некоторого миогочлена с рациональными коэффициентами. Доказать, что множество всех алгебраических чисел счетно.

3. Доказать, что множество всех рациональных интервалов (т. е. интервалов с рациональными концами) на прямой счетно.

4. Доказать, что множество всех точек плоскости, имеющих рациоиальные координаты, счетно.

Указание. Воспользоваться свойством 2.

3. *Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Доказательство. Пусть M — бесконечное множество. Выберем в нем произвольный элемент a_1. Поскольку M бесконечно, в нем найдется элемент a_2, отличный от a_1, затем найдется элемент a_3, отличный от a_1 и от a_2 и т. д. Продолжая этот процесс (который не может оборваться из-за «нехватки» элементов, ибо M бесконечно), мы получаем счетное подмножество

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

множества M. Предложение доказано.

Это предложение показывает, что среди бесконечных множеств счетные являются «самыми маленькими». Ниже мы выясним, существуют ли несчетные бесконечные множества.

3. Эквивалентность множеств. Сравнивая те или иные бесконечные множества с натуральным рядом, мы пришли к понятию счетного множества. Ясно, что множества можно сравнивать не только с множеством натуральных чисел; установление взаимно

однозначного соответствия (биекции) позволяет сравнивать между собой любые два множества. Введем следующее определение.

Определение. Два множества, M и N, называются *эквивалентными* (обозначение $M \sim N$), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Понятие эквивалентности применимо к любым множествам, как конечным, так и бесконечным. Два конечных множества эквивалентны между собой тогда (и только тогда), когда число элементов у них одинаково. Определение счетного множества можно теперь сформулировать следующим образом: *множество называется счетным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.* Ясно, что два множества, эквивалентные третьему, эквивалентны между собой; в частности, любые два счетных множества эквивалентны между собой.

Примеры. 1. Множества точек на любых двух отрезках $[a, b]$ и $[c, d]$ эквивалентны между собой. Из рис. 5 ясно, как установить между ними биекцию. Именно, точки p и q соответствуют друг другу, если они являются проекциями одной и той же точки r вспомогательного отрезка ef.

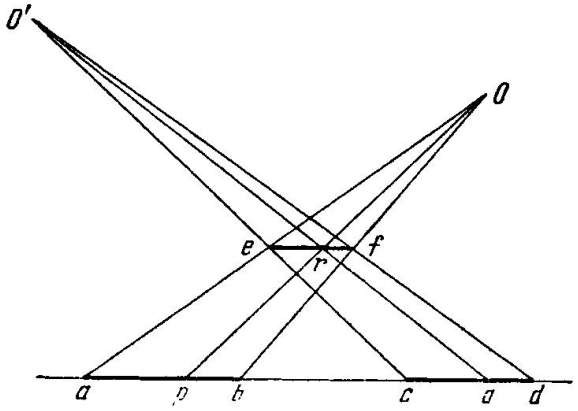


Рис. 5.

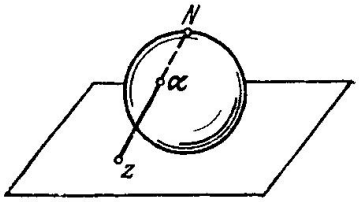


Рис. 6.

2. Множество всех точек на расширенной комплексной плоскости эквивалентно множеству всех точек на сфере. Биекцию $\alpha \leftrightarrow z$ можно установить, например, с помощью стереографической проекции (рис. 6).

3. Множество всех чисел в интервале (0, 1) эквивалентно множеству всех точек на прямой. Соответствие можно установить, например, с помощью функции

$$y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}.$$

Рассматривая примеры, приведенные здесь и в п. 2, можно заметить, что иногда бесконечное множество оказывается экви-

валентным своей истинной части. Например, натуральных чисел оказывается «столько же», сколько и всех целых или даже всех рациональных; на интервале (0, 1) «столько же» точек, сколько и на всей прямой, и т. д. Это явление характерно для бесконечных множеств. Действительно, в п. 2 (свойство 3) мы показали, что из всякого бесконечного множества M можно выбрать счетное подмножество; пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ такое подмножество.

Разобьем его на два счетных подмножества

$$A_1 = \{a_1, a_3, a_5, \ldots\} \text{ и } A_2 = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\}$$

и установим между A и A_1 взаимно однозначное соответствие. Это соответствие можно затем продолжить до взаимно однозначного соответствия между множествами $A \cup (M \setminus A) = M$ и $A_1 \cup (M \setminus A) = M \setminus A_2$, отнеся каждому элементу из $M \setminus A$ сам этот элемент. Между тем множество $M \setminus A_2$ не совпадает с M, т. е. является собственным подмножеством для M. Мы получаем, таким образом, следующее предложение:

Всякое бесконечное множество эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству.

Это свойство можно принять за определение бесконечного множества.

Упражнение. Доказать, что если M — произвольное бесконечное множество и A счетно, то $M \sim M \cup A$.

4. Несчетность множества действительных чисел. В п. 2 мы привели примеры счетных множеств. Число этих примеров можно было бы увеличить. Кроме того, как мы показали, сумма конечного или счетного числа счетных множеств снова есть счетное множество.

Естественно возникает вопрос: а существуют ли вообще несчетные множества? Положительный ответ на него дает следующая теорема.

Теорема 1. *Множество действительных чисел, заключенных между нулем и единицей, несчетно.*

Доказательство. Предположим, что дано какое-то счетное множество (всех или только некоторых) действительных чисел α, лежащих на отрезке [0, 1]:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = 0, \quad a_{11}a_{12}a_{13} \ldots a_{1n} \ldots, \\ \alpha_2 = 0, \quad a_{21}a_{22}a_{23} \ldots a_{2n} \ldots, \\ \alpha_3 = 0, \quad a_{31}a_{32}a_{33} \ldots a_{3n} \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n = 0, \quad a_{n1}a_{n2}a_{n3} \ldots a_{nn} \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Здесь a_{ik} — k-я десятичная цифра числа α_i. Построим дробь

$$\beta = 0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

диагональной процедурой Кантора, а именно: за b_1 примем произвольную цифру, не совпадающую с a_{11}, за b_2 — произвольную цифру, не совпадающую с a_{22}, и т. д.; вообще, за b_n примем произвольную цифру, не совпадающую с a_{nn}. Эта десятичная дробь не может совпасть ни с одной дробью, содержащейся в перечне (1). Действительно, от α_1 дробь β отличается по крайней мере первой цифрой, от α_2 — второй цифрой и т. д.; вообще, так как $b_n \neq a_{nn}$ для всех n, то дробь β отлична от любой из дробей α_i, входящих в перечень (1). Таким образом, никакое счетное множество действительных чисел, лежащих на отрезке [0, 1], не исчерпывает этого отрезка.

Приведенное доказательство содержит небольшой «обман». Дело в том, что некоторые числа (а именно, числа вида $p/10^q$) могут быть записаны в виде десятичной дроби двумя способами: с бесконечным числом нулей или с бесконечным числом девяток; например,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5000 \ldots = 0{,}4999 \ldots$$

Таким образом, несовпадение двух десятичных дробей еще не гарантирует различия изображаемых ими чисел.

Однако если дробь β строить осторожнее, так, чтобы она не содержала ни нулей, ни девяток, полагая, например, $b_n = 2$, если $a_{nn} = 1$, и $b_n = 1$, если $a_{nn} \neq 1$, то доказательство становится вполне корректным.

Упражнение. Показать, что числа, обладающие двумя различными десятичными разложениями, образуют счетное множество.

Итак, отрезок [0, 1] дает пример несчетного множества. Приведем некоторые примеры множеств, эквивалентных отрезку [0, 1].

1. Множество всех точек любого отрезка $[a, b]$ или интервала (a, b).
2. Множество всех точек на прямой.
3. Множество всех точек плоскости, пространства, поверхности сферы, точек, лежащих внутри сферы, и т. д.
4. Множество всех прямых на плоскости.
5. Множество всех непрерывных функций одного или нескольких переменных.

В случаях 1 и 2 доказательство не представляет труда (см. примеры 1 и 3 п. 3). В остальных случаях непосредственное доказательство довольно сложно.

Упражнение. Используя результаты этого пункта и упражнение 2 п. 2, доказать существование *трансцендентных* чисел, т. е. чисел, не являющихся алгебраическими.

5. Теорема Кантора — Бернштейна. Следующая теорема является одной из основных в теории множеств.

Теорема 2 (Кантор — Бернштейн). *Пусть A и B — два произвольных множества. Если существуют взаимно однозначное отображение f множества A на подмножество B_1 множества B и взаимно одноэначное отображение g множества B на подмножество A_1 множества A, то A и B эквивалентны.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что A и B не пересекаются. Пусть x — произвольный элемент из A. Положим $x = x_0$ и определим последовательность элементов $\{x_n\}$ следующим образом. Пусть элемент x_n уже определен. Тогда, если n четно, то за x_{n+1} примем элемент из B, удовлетворяющий условию $g(x_{n+1}) = x_n$ (если такой элемент существует), а если n нечетно, то x_{n+1} — элемент из A, удовлетворяющий условию $f(x_{n+1}) = x_n$ (если он существует). Возможны два случая.

1°. При некотором n элемента x_{n+1}, удовлетворяющего указанным условиям, не существует. Число n называется *порядком элемента x.*

2°. Последовательность $\{x_n\}$ бесконечна [1]). Тогда x называется *элементом бесконечного порядка.*

Разобьем теперь A на три множества: A_E, состоящее из элементов четного порядка, A_O — множество элементов нечетного порядка и A_I — множество всех элементов бесконечного порядка. Разбив аналогичным образом множество B, заметим, что f отображает A_E на B_O и A_I на B_I, а g^{-1} отображает A_O на B_E. Итак, взаимно однозначное отображение ψ, совпадающее с f на $A_E \cup A_I$ и с g^{-1} на A_O, есть взаимно однозначное отображение всего A на все B.

6. Понятие мощности множества. Если эквивалентны два конечных множества, то они состоят из одного и того же числа элементов. Если же эквивалентные между собой множества M и N произвольны, то говорят, что M и N имеют одинаковую *мощность*. Таким образом, мощность — это то общее, что есть у любых двух эквивалентных между собой множеств. Для конечных множеств понятие мощности совпадает с привычным понятием числа элементов множества. Мощность множества натуральных чисел (т. е. любого счетного множества) обозначается символом $\aleph_0$ (читается: «алеф нуль»). Про множества, эквивалентные множеству всех действительных чисел отрезка [0, 1], говорят, что они имеют *мощность континуума.* Эта мощность обозначается символом c (или символом $\aleph$).

---

[1]) При этом число *различных* элементов x_n может быть и конечно: они могут «зацикливаться», образуя *бесконечную* последовательность, содержащую лишь *конечное* число попарно различных элементов.

Весьма глубокий вопрос о существовании мощностей, промежуточных между $\aleph_0$ и c, будет затронут ниже в § 4. Как правило, бесконечные множества, встречающиеся в анализе, или счетны, или имеют мощность континуума.

Для мощностей конечных множеств, т. е. для натуральных чисел кроме понятия равенства имеются также понятия «больше» и «меньше». Попытаемся распространить эти последние на бесконечные мощности.

Пусть A и B — два произвольных множества, а $m(A)$ и $m(B)$ — их мощности. Тогда логически возможны следующие случаи:

1. A эквивалентно некоторой части множества B, а B эквивалентно некоторой части множества A.

2. A содержит некоторую часть, эквивалентную B, но в B нет части, эквивалентной A.

3. B содержит некоторую часть, эквивалентную A, но в A нет части, эквивалентной B.

4. Ни в одном из этих двух множеств нет части, эквивалентной другому.

В первом случае множества A и B в силу теоремы Кантора — Бернштейна эквивалентны между собой, т. е. $m(A) = m(B)$. Во втором случае естественно считать, что $m(A) > m(B)$, а в третьем, что $m(A) < m(B)$. Наконец, в четвертом случае нам пришлось бы считать, что мощности множеств A и B несравнимы между собой. Но на самом деле этот случай невозможен! Это следует из теоремы Цермело, о которой речь будет идти в § 4.

Итак, *любые два множества A и B либо эквивалентны между собой* (*и тогда* $m(A) = m(B)$), либо удовлетворяют одному из двух соотношений: $m(A) < m(B)$ или $m(A) > m(B)$.

Мы отметили выше, что счетные множества — это «самые маленькие» из бесконечных множеств, а затем показали, что существуют и бесконечные множества, бесконечность которых имеет более «высокий порядок»,—это множества мощности континуума. А существуют ли бесконечные мощности, превосходящие мощность континуума? Вообще, существует ли какая-то «наивысшая» мощность или нет? Оказывается, верна следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть M — некоторое множество и пусть $\mathfrak{M}$ — множество, элементами которого являются всевозможные подмножества множества M. Тогда $\mathfrak{M}$ имеет мощность бо́льшую, чем мощность исходного множества M.*

Доказательство. Легко видеть, что мощность $\mathfrak{m}$ множества $\mathfrak{M}$ не может быть меньше мощности m исходного множества M; действительно, «одноэлементные» подмножества из M образуют в $\mathfrak{M}$ часть, эквивалентную множеству M. Остается доказать, что мощности $\mathfrak{m}$ и m не совпадают. Пусть между элементами $a, b, \ldots$ множества M и какими-то элементами $A, B, \ldots$ множе-

ства $\mathfrak{M}$ (т. е. какими-то подмножествами из M) установлено взаимно однозначное соответствие

$$a \leftrightarrow A, \quad b \leftrightarrow B, \ldots$$

Покажем, что оно наверняка не исчерпывает всего $\mathfrak{M}$. Именно, сконструируем такое множество $X \subset M$, которому не соответствует никакой элемент из M. Пусть X — совокупность элементов из M, не входящих в те подмножества, которые им соответствуют. Подробнее: если $a \leftrightarrow A$ и $a \in A$, то элемент a мы не включаем в X, а если $a \leftrightarrow A$ и $a \notin A$, то мы включаем элемент a в X. Ясно, что X есть подмножество множества M, т. е. некоторый элемент из $\mathfrak{M}$. Покажем, что подмножеству X не может соответствовать никакой элемент из M. Допустим, что такой элемент $x \leftrightarrow X$ существует; посмотрим, будет ли он содержаться в X или нет? Пусть $x \notin X$; но ведь по определению в X входит всякий элемент, не содержащийся в подмножестве, которое ему соответствует, следовательно, элемент x должен быть включен в X. Обратно, предположив, что x содержится в X, мы получим, что x не может содержаться в X, так как в X включены только те элементы, которые не входят в соответствующие им подмножества. Итак, элемент x, отвечающий подмножеству X, должен одновременно и содержаться и не содержаться в X. Отсюда следует, что такого элемента вообще не существует, т. е. что взаимно однозначного соответствия между элементами множества M и всеми его подмножествами установить нельзя. Теорема доказана.

Итак, для любой мощности мы действительно можем построить множество большей мощности, затем еще большей и т. д., получая, таким образом, не ограниченную сверху шкалу мощностей.

Замечание. Мощность множества $\mathfrak{M}$ обозначают символом 2^m, где m — мощность M. (Читатель легко поймет смысл этого обозначения, рассмотрев случай конечного M.) Таким образом, предыдущую теорему можно выразить неравенством $m < 2^m$. В частности, при $m = \aleph_0$ получаем неравенство $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. Покажем, что $2^{\aleph_0} = \aleph$, т. е. покажем, что *мощность множества всех подмножеств натурального ряда равна мощности континуума.*

Разобьем подмножества натурального ряда на два класса, $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{G}$, — на те (класс $\mathfrak{P}$), у которых дополнение бесконечно, и на те (класс $\mathfrak{G}$), у которых оно конечно. К классу $\mathfrak{G}$ относится, в частности, сам натуральный ряд, ибо его дополнение пусто. Число подмножеств в классе $\mathfrak{G}$ счетно (доказать). Класс $\mathfrak{G}$ не влияет на мощность множества $\mathfrak{M} = \mathfrak{P} \cup \mathfrak{G}$.

Между подмножествами класса $\mathfrak{P}$ и действительными числами α из полусегмента $[0, 1)$ можно установить взаимно одно-

значное соответствие. Именно, сопоставим подмножеству $A \in \mathfrak{P}$ число α, $0 \leqslant \alpha < 1$, с двоичным разложением

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \ \ldots \ + \frac{\varepsilon_n}{2^n} + \ \ldots,$$

где $\varepsilon_n = 1$ или 0 в зависимости от того, принадлежит ли n множества A или нет. Проверку деталей предоставляем читателю.

Упражнение. Доказать, что совокупность всех числовых функций (или вообще функций, принимающих значения в множестве, содержащем не менее двух элементов), определенных на некотором множестве M, имеет мощность бóльшую, чем мощность множества M.

Указание. Воспользоваться тем, что множество всех *индикаторов*, т. е. функций на M, принимающих только два значения, 0 и 1, эквивалентно множеству всех подмножеств из M.