Лекция №2

ГЛАВА I

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Рациональные числа. Бесконечные десятичные дроби

1. Логическая символика. При изложении курса математического анализа для сокращения будем использовать логические символы $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, значения которых разъясняются в приводимой ниже таблице.

Символ	Название	Разъяснение
$\forall$	Знак *общности*	Заменяет слова: для любого, для каждого, для всех
$\exists$	Знак *существования*	Заменяет слова: существует, найдется
$\Rightarrow$	Знак *следования* (*импликации*)	Запись $A \Rightarrow B$ означает, что A влечет B или B следует из A
$\Leftrightarrow$	Знак *равносильности* (*эквивалентности*)	Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что B следует из A и A следует из B. Иначе: A равносильно B; A необходимо и достаточно для B; A тогда и только тогда, когда B

Символы $\forall$, $\exists$ называют *кванторами* (общности и существования).

Кроме указанных в таблице символов, употребляются также следующие знаки:

а) $\vee$ — знак *дизъюнкции*, заменяет союз “или”; запись $A \vee B$ означает, что имеет место хотя бы одно из высказываний A, B;

б) $\wedge$ — знак *конъюнкции*, заменяет союз “и”;

в) $\rceil$ — знак *отрицания*; запись $\rceil A$ означает “не A” (отрицание высказывания A).

Рассмотрим примеры использования логических символов.

Пример 1. Пусть

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \text{квадратный трехчлен } y = ax^2 + bx + c \text{ принимает} \\ \text{положительные значения при всех } x \end{array} \right\},$$

$$B = \{D < 0\}, \quad \text{где} \quad D = b^2 - 4ac,$$

$$C = \{D < 0,\ a > 0\} = \{D < 0\} \wedge \{a > 0\}.$$

Докажем, что $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow C$.

$\triangle$ а) Предположим, что из A не следует B. Тогда $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$.

В этом случае квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни x_1 и x_2 ($x_1 = x_2$ при $D = 0$) и поэтому обращается в нуль при $x = x_1$ и $x = x_2$, что противоречит A. Итак, предположение о том, что из A не следует B, является неверным. Поэтому из A следует B, т. е. $A \Rightarrow B$.

б) Докажем, что $A \Rightarrow C$. Воспользуемся равенством

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-D}{4a^2}\right]. \qquad (1)$$

Так как $A \Rightarrow \{D < 0\}$, то выражение в квадратных скобках в формуле (1) положительно, и поэтому из условия $y > 0$ следует, что $a > 0$. Итак, $A \Rightarrow C$.

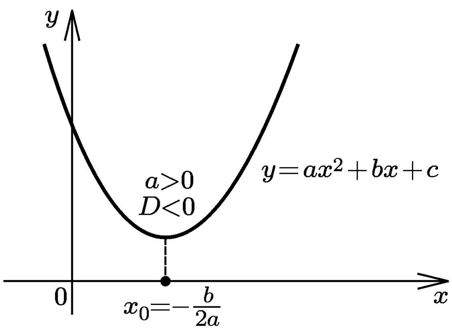

Рис. 1.1

Обратно: если имеет место C, т. е. $D < 0$ и $a > 0$, то из равенства (1) следует, что $y > 0$ при всех x.

Таким образом, квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения при всех действительных значениях x (рис. 1.1) тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $D = b^2 - 4ac < 0$. ▲

Использование кванторов $\forall$, $\exists$ позволяет не только сокращать запись, но и легко строить отрицания утверждений (высказываний, определений), содержащих слова “любой”, “существует”, которые часто встречаются в определениях и теоремах.

П р и м е р 2. Пусть заданы числовое множество X и число M. Записать с помощью кванторов отрицание утверждений:

а) $A = \left\{\begin{array}{l}\text{все элементы } x \text{ числового множества } X \\ \text{удовлетворяют условию } x < M\end{array}\right\}$;

б) $B = \left\{\begin{array}{l}\text{существует число } M > 0 \text{ такое, что все элементы } x \\ \text{из множества } X \text{ удовлетворяют условию } |x| \geqslant M\end{array}\right\}$.

$\triangle$ а) Пусть A не имеет места, т. е. не все элементы x множества X удовлетворяют условию $x < M$. Это означает, что найдется (существует) такой элемент $x \in X$, для которого неравенство $x < M$ не выполняется, т. е. имеет место противоположное неравенство $x \geqslant M$.

Запишем A и $\rceil A$ с помощью кванторов:

$$A = \{\forall x \in X \to x < M\},$$
$$\rceil A = \{\exists x \in X\colon\ x \geqslant M\}.$$

Здесь знак $\to$ заменяет слова “выполняется”, “имеет место”, а двоеточие заменяет слова “такой, что”.

б) Пусть B не имеет места, т. е. не существует числа $M > 0$ такого, чтобы для любого $x \in X$ имело место неравенство $|x| \geqslant M$. Это означает, что для любого $M > 0$ неравенство $|x| \geqslant M$ не может выполняться для каждого $x \in X$. Иначе говоря, существует такой элемент $x = x_M \in X$ (зависящий, вообще говоря, от M), для которого неравенство $|x| \geqslant M$ не выполняется, т. е. справедливо неравенство $|x_M| < M$. С помощью кванторов утверждения B и $\rceil B$ можно записать так:

$$B = \{\exists M > 0\colon\ \forall x \in X \to |x| \geqslant M\},$$
$$\rceil B = \{\forall M > 0\ \exists x_M \in X\colon\ |x_M| < M\}. \quad \blacktriangle$$

Эти примеры показывают, что отрицание утверждения, содержащего кванторы $\forall$, $\exists$ и свойство P (в данных примерах это неравенства $x < M$ и $|x| \geqslant M$ соответственно), получается заменой $\forall$ на $\exists$, $\exists$ на $\forall$ и свойства P — на его отрицание.

2. Рациональные числа и их свойства. Понятие рационального числа и основные свойства рациональных чисел известны из курса математики для средней школы. Рациональное число можно записать в виде p/q, где p — целое, q — натуральное число. В частности, любое целое число p является рациональным, так как его можно записать в виде $p = p/1$. Например, $0 = 0/1$, $1 = 1/1$.

Пусть $a = p/q$, $b = p_1/q_1$ — два рациональных числа. Тогда правило упорядочения этих чисел определяется так:

а) если $pq_1 = qp_1$, то $a = b$;

б) если $pq_1 > qp_1$, то $a > b$;

в) если $pq_1 < qp_1$, то $a < b$;

а сумма и произведение чисел a и b определяются соответственно равенствами

$$a + b = \frac{pq_1 + qp_1}{qq_1}, \quad ab = \frac{pp_1}{qq_1}.$$

Операции сложения и умножения рациональных чисел обладают свойствами:

а) коммутативности:

$$a + b = b + a, \quad ab = ba;$$

б) ассоциативности:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc);$$

в) дистрибутивности:

$$a(b + c) = ab + ac;$$

г) для любого рационального числа a справедливы равенства

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a.$$

Операции вычитания и деления вводятся как обратные соответственно к операциям сложения и умножения:

а) для любых рациональных чисел a, b существует (и притом единственное) число x такое, что

$$b + x = a;$$

это число называют *разностью* чисел a и b и обозначают $a - b$; в частности, разность $0 - b$ обозначают $-b$;

б) если $b \neq 0$, то существует единственное число z такое, что

$$bz = a;$$

это число называют *частным* чисел a и b и обозначают a/b.

Отметим еще основные свойства неравенств для рациональных чисел:

а) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (транзитивность);

б) если $a > b$, то $a + c > b + c$ при любом c;

в) если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$;

г) если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$;

д) если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

N — множество натуральных чисел,

Z — множество целых чисел,

Q — множество рациональных чисел.

В множестве Q можно выполнять не только четыре арифметических действия, но и решать уравнения и системы уравнений первой степени. Однако даже простейшие квадратные уравнения вида $x^2 = a$, где $a \in N$, не всегда разрешимы в множестве Q. В частности, уравнение $x^2 = 2$ не имеет решений в множестве Q.

Таким образом, уже проблема решения простых уравнений типа $x^2 = a$, $x^3 = a$, где $a \in N$, приводит к необходимости расширения множества рациональных чисел путем добавления к этому множеству новых элементов, называемых *иррациональными числами*. Ниже (без изложения всех подробностей) показывается, как такое расширение строится.

3. Бесконечные десятичные дроби и их приближения.

а) *Периодичные десятичные дроби.* Из школьного курса алгебры известно, что любое рациональное число можно представить либо в виде конечной, либо в виде бесконечной периодической десятичной дроби, используя алгоритм деления “уголком”. Например, рациональному числу $3/8$ соответствует конечная десятичная дробь 0,375, т. е. $3/8 = 0{,}375$. Аналогично, рациональному числу $-27/11$ соответствует бесконечная периодическая десятичная дробь $-2{,}4545... = -2{,}(45)$, т. е. $-27/11 = -2{,}(45)$.

Обратно: зная бесконечную периодическую десятичную дробь, можно найти рациональное число, представлением которого эта дробь является. Для этого используется формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $a + aq + aq^2 + ... = \dfrac{a}{1-q}$, $|q| < 1$.

Например,

$$2{,}(45) = 2 + \frac{45}{100} + \frac{45}{100^2} + ... = 2 + \frac{\frac{45}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 2 + \frac{45}{99} = \frac{27}{11}.$$

Рациональное число, представимое конечной десятичной дробью, будем отождествлять с соответствующей бесконечной десятичной дробью с нулем в периоде. Заметим, что рациональное число, представимое конечной десятичной дробью, можно записать и в виде бесконечной десятичной дроби с цифрой 9 в периоде. Например, $2{,}5 = 2{,}5(0) = 2{,}4(9)$.

Таким образом, между множеством всех рациональных чисел и множеством всех бесконечных периодических десятичных дробей устанавливается взаимно однозначное соответствие, если отождествлять бесконечную десятичную дробь с цифрой 9 в периоде с соответствующей бесконечной десятичной дробью с цифрой 0 в периоде.

Условимся употреблять такие бесконечные периодические десятичные дроби, которые не имеют цифры 9 в периоде. Если бесконечная периодическая десятичная дробь с цифрой 9 в периоде возникает в процессе рассуждений, то будем такую дробь заменять бесконечной десятичной дробью с нулем в периоде.

У п р а ж н е н и е 1. Доказать, что если $\frac{p}{q}$ $(p \in N,\ q \in N)$ — рациональное число, соответствующее бесконечной периодической десятичной дроби α, то рациональное число $10^k \frac{p}{q}$ $(k \in N)$ соответствует бесконечной периодической десятичной дроби, получаемой из α сдвигом запятой вправо на k разрядов. Используя это правило, показать, что если бесконечная периодическая десятичная дробь имеет вид $\alpha = a_0, a_1 ... a_n (b_1 ... b_m)$, то

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1 a_2 ... a_n b_1 b_2 ... b_m - a_1 a_2 ... a_n}{\underbrace{99...9}_{m}\underbrace{00...0}_{n}}.$$

б) *Множество вещественных чисел.* Рассмотрим бесконечную десятичную дробь вида

$$\pm a_0, a_1 a_2 ... a_n ... \qquad (2)$$

Эта дробь определяется заданием знака + или −, целого неотрицательного числа a_0 и последовательности десятичных знаков $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ (множество десятичных знаков состоит из десяти чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Всякую дробь вида (2) будем называть *вещественным числом.* Если перед дробью (2) стоит знак +, его обычно опускают и пишут

$$a_0, a_1 a_2 ... a_n ... \qquad (3)$$

Число вида (3) будем называть *неотрицательным вещественным числом*, а в случае, когда хотя бы одно из чисел $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ отлично от нуля, — *положительным вещественным числом.* Число вида

$$-a_0, a_1a_2...a_n..., \tag{4}$$

где хотя бы одно из чисел a_0, a_1, a_2, ... отлично от нуля, будем называть *отрицательным вещественным числом.*

Если $a = a_0, a_1a_2...a_n...$, $b = -a_0, a_1a_2...a_n...$, то число b называют *противоположным* числу a, а число a — противоположным числу b.

Если дробь (2) является периодической, то ее называют *рациональным числом*, а если эта дробь не является периодической, то ее называют *иррациональным числом.* Множество всех десятичных дробей вида (2) называют множеством *вещественных чисел* и обозначают R, а его подмножество, состоящее из непериодических десятичных дробей, — множеством *иррациональных чисел* и обозначают J.

Приведем примеры иррациональных чисел.

1) $$a = 0{,}1234567891011... \tag{5}$$

Здесь после запятой стоят натуральные числа, выписанные подряд, начиная с единицы.

2) $$b = 27{,}1010010001000010... \tag{6}$$

Здесь после запятой выписаны подряд числа 10, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$ и т. д.

Упражнение 2. Показать, что числа a и b, заданные равенствами (5) и (6), являются иррациональными.

в) *Десятичные приближения вещественных чисел.* Поставим в соответствие неотрицательному вещественному числу (3) конечные десятичные дроби

$$\overline{\alpha}_n = a_0, a_1...a_n + \frac{1}{10^n}, \quad \underline{\alpha}_n = a_0, a_1...a_n$$

и будем называть их *n-ми десятичными приближениями* числа $\alpha = a_0, a_1a_2...a_n...$ соответственно с *избытком* и *недостатком.* Если α — отрицательное вещественное число вида (4), то для него n-е десятичные приближения с избытком и недостатком определяются соответственно равенствами

$$\overline{\alpha}_n = -a_0, a_1...a_n, \quad \underline{\alpha}_n = -a_0, a_1...a_n - \frac{1}{10^n}.$$

Десятичные приближения найдут применение при определении арифметических операций на множестве R (§ 3).

Упражнение 3. Показать, что для любого вещественного числа его десятичные приближения обладают следующими свойствами:

а) $\overline{\alpha}_k - \underline{\alpha}_k = \dfrac{1}{10^k}, \quad k \in N$;

б) $\underline{\alpha}_1 \leqslant \underline{\alpha}_2 \leqslant ... \leqslant \underline{\alpha}_n \leqslant ...$;

в) $\overline{\alpha}_1 \geqslant \overline{\alpha}_2 \geqslant ... \geqslant \overline{\alpha}_n \geqslant ...$;

г) $\underline{\alpha}_n < \overline{\alpha}_m$ для любых n и m.

4. Сравнение вещественных чисел.

а) *Сравнение неотрицательных чисел.* Два неотрицательных вещественных числа

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 ... a_n ... \quad \text{и} \quad \beta = b_0, b_1 b_2 ... b_n ...$$

называют ***равными*** и пишут $\alpha = \beta$, если $a_k = b_k$ при $k = 0, 1, 2, ...$, т. е.

$$\{\alpha = \beta\} \Leftrightarrow \{a_k = b_k,\ k = 0, 1, 2, ...\}.$$

В частности, $\{\alpha = 0\} \Leftrightarrow \{a_k = 0,\ k = 0, 1, 2, ...\}$.

Дадим определение соотношений $\alpha < \beta$ и $\alpha > \beta$. Говорят, что число α ***меньше*** числа β, и пишут $\alpha < \beta$, если либо $a_0 < b_0$, либо $a_0 = b_0$ и существует такой номер n, что $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_{n-1} = b_{n-1}$, но $a_n < b_n$, т. е.

$$\{\alpha < \beta\} \Leftrightarrow \{a_0 < b_0\} \vee \{\exists n \in N\colon\ a_k = b_k,\ k = \overline{0, n-1};\ a_n < b_n\}.$$

Запись $k = \overline{0, n-1}$ означает, что равенство $a_k = b_k$ выполняется при значениях k от 0 до $n - 1$ включительно, так что n — наименьший номер, для которого это равенство не выполняется и имеет место неравенство $a_n < b_n$. Аналогично

$$\{\alpha > \beta\} \Leftrightarrow \{a_0 > b_0\} \vee \{\exists n \in N\colon\ a_k = b_k,\ k = \overline{0, n-1};\ a_n > b_n\}.$$

Из определения равенства $\alpha = \beta$ и неравенств $\alpha < \beta$ и $\alpha > \beta$ следует, что для любых неотрицательных вещественных чисел α и β выполняется одно из трех условий: $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$.

Отметим еще, что для любого неотрицательного вещественного числа α справедливо неравенство $\alpha \geqslant 0$.

б) *Сравнение произвольных вещественных чисел.* Назовем ***модулем вещественного числа*** α вещественное число, обозначаемое символом $|\alpha|$, представимое той же бесконечной десятичной дробью, что и число α, но взятое со знаком $+$. Таким образом, если

$$\alpha = \pm a_0, a_1 a_2 ... a_n ..., \quad \text{то} \quad |\alpha| = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...,$$

откуда следует, что $|\alpha|$ — неотрицательное вещественное число при любом α.

Введем теперь правило сравнения двух вещественных чисел α и β для случая, когда хотя бы одно из этих чисел отрицательно (правило сравнения неотрицательных чисел введено выше).

Если α — неотрицательное, β — отрицательное число, то считают, что $\alpha > \beta$.

Если оба числа α и β отрицательны ($\alpha < 0$, $\beta < 0$), то будем считать, что:

1) $\alpha = \beta$, если $|\alpha| = |\beta|$,

2) $\alpha < \beta$, если $|\beta| < |\alpha|$.

Таким образом, правило сравнения сформулировано для любых вещественных чисел.

З а м е ч а н и е 1. Легко убедиться в том, что сформулированное правило сравнения вещественных чисел в применении к рациональным числам, записанным в виде бесконечных десятичных дробей, приводит к тому же результату, что и правило сравнения рациональных чисел (п. 2), представленных в виде отношения целых чисел.

З а м е ч а н и е 2. Если $\underline{\alpha}_n$, $\underline{\beta}_n$ — n-е приближения с недостатком, а $\overline{\alpha}_n$, $\overline{\beta}_n$ — n-е приближения с избытком чисел α и β соответственно, то из правила сравнения вещественных чисел следует, что:

1) $\underline{\alpha}_n \leqslant \alpha \leqslant \overline{\alpha}_n$, $\underline{\beta}_n \leqslant \beta \leqslant \overline{\beta}_n$ для любого $n \in N$;

2) $\alpha < \beta \Rightarrow \exists n\colon\ \overline{\alpha}_n < \underline{\beta}_n$.

в) *Транзитивность правила сравнения.* Докажем, что если $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$. Ограничимся доказательством для случая, когда сравниваются неотрицательные числа. Пусть

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...,$$
$$\beta = b_0, b_1 b_2 ... b_n ...,$$
$$\gamma = c_0, c_1 c_2 ... c_n ...$$

Пусть p и m — наименьшие номера, для которых нарушаются соответственно равенства $a_k = b_k$ и $b_k = c_k$ $\quad (k = 0, 1, 2, ...)$, и пусть, например, $p \leqslant m$. Тогда p — наименьший номер, при котором нарушается равенство $a_k = c_k$ и имеет место неравенство $a_p < c_p$. По правилу сравнения вещественных чисел отсюда следует, что $\alpha < \gamma$.

5. Свойства вещественных чисел, связанные с неравенствами.

Л е м м а 1. *Если α и β — вещественные числа, причем $\alpha < \beta$, то найдется такое рациональное число r, что*

$$\alpha < r < \beta. \tag{7}$$

○ а) Пусть α и β — рациональные числа ($\alpha \in Q$, $\quad \beta \in Q$). Тогда для них определены арифметические операции, и в качестве r можно взять число $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$, так как

$$\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta.$$

б) Пусть по крайней мере одно из чисел α, β является иррациональным. Будем считать, что $\beta \in J$. Предположим для определенности, что $\alpha \geqslant 0$ и что

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$$

Так как $\beta > \alpha$ и $\alpha \geqslant 0$, то $\beta > 0$. Пусть

$$\beta = b_0, b_1 b_2 ... b_n ...$$

Пусть p — наименьший номер, при котором нарушается равенство $a_k = b_k$ $\quad (k = 0, 1, 2, ...)$. Будем считать, что $p > 0$. Тогда

$$a_0 = b_0, \quad ..., \quad a_{p-1} = b_{p-1}, \quad a_p < b_p. \tag{8}$$

По условию $\beta \in J$, и, значит, β не может быть конечной десятичной дробью (бесконечной периодической дробью с периодом 0). Поэтому найдется номер, больший p (обозначим его $p+m$) и такой, что

$$b_{p+m} > 0. \tag{9}$$

Покажем, что рациональное число $r = a_0, a_1 ... a_{p-1} b_p ... b_{p+m-1}(0)$ удовлетворяет условию (7). Из (8) следует, что $\alpha < r$. Далее, $r = b_0, b_1 ... b_{p+m-1}(0) < b_0, b_1 ... b_{p+m-1} b_{p+m} ...$ в силу условия (9), т. е. $r < \beta$. Итак, доказано, что $\alpha < r < \beta$, причем $r \in Q$. ●

Следствие. *Если $\alpha \in R$, $\beta \in R$ и $\alpha < \beta$, то*

$$\exists r \in Q \quad \exists r' \in Q\colon\ \alpha < r < r' < \beta. \tag{10}$$

Упражнение 4. Пусть $\alpha \in R$, $\beta \in R$ и $\alpha < \beta$. Доказать, что

$$\exists \gamma \in J\colon\ \alpha < \gamma < \beta.$$

Лемма 2. *Пусть $\delta \in R$, $\delta' \in R$ и пусть существуют такие последовательности рациональных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, что для всех $n \in N$ справедливы неравенства*

$$x_n \leqslant \delta \leqslant \delta' \leqslant y_n, \tag{11}$$

$$y_n - x_n \leqslant \frac{1}{10^n}. \tag{12}$$

Тогда

$$\delta = \delta'. \tag{13}$$

○ Пусть равенство (13) не выполняется; тогда из условия (11) следует, что $\delta < \delta'$. В силу следствия из леммы 1 существуют рациональные числа r и r' такие, что

$$\delta < r < r' < \delta'. \tag{14}$$

Из (14) следует, что $r' - r > 0$, и поэтому

$$\exists m \in N\colon\ r' - r > \frac{1}{10^m}. \tag{15}$$

Из (11) и (14) следует, что

$$x_n \leqslant \delta < r < r' < \delta' \leqslant y_n,$$

откуда в силу транзитивности правила сравнения получаем

$$x_n < r < r' < y_n. \tag{16}$$

Используя неравенства (15), (12), (16) и свойства неравенств для рациональных чисел, получаем

$$\frac{1}{10^m} < r' - r < y_n - x_n \leqslant \frac{1}{10^n},$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{10^m} < \frac{1}{10^n}. \tag{17}$$

Неравенство (17) должно выполняться при фиксированном $m \in N$ и при любом $n \in N$. Однако при $n = m$ неравенство (17) не выполняется. Поэтому неравенство $\delta < \delta'$ не может иметь места, т. е. справедливо равенство (13). ●

6. Геометрическая интерпретация вещественных чисел. Рассмотрим прямую l (рис. 1.2), выберем на ней начало отсчета (точ-

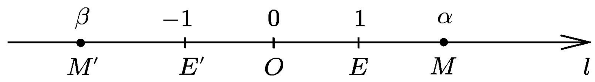

Рис. 1.2

ку O) и масштабный отрезок OE длины 1. Числу 0 поставим в соответствие точку O, числу 1 — точку E, числу -1 — точку E', симметричную точке E относительно O. Положительному числу $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ поставим в соответствие точку M, находящуюся справа от O на расстоянии α, а отрицательному числу $\beta = -b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ — точку M', находящуюся слева от O на расстоянии $|\beta|$.

Эту прямую будем называть *числовой прямой* или *числовой осью.* Из аксиом геометрии и свойств вещественных чисел следует, что между множеством вещественных чисел R и числовой прямой l устанавливается взаимно однозначное соответствие: каждому вещественному числу соответствует единственная точка числовой прямой и, наоборот, каждой точке числовой прямой соответствует некоторое вещественное число. Поэтому в дальнейшем будем отождествлять множество R с множеством точек числовой прямой, а вещественные числа часто будем называть *точками.*

Условимся о следующих обозначениях для некоторых наиболее употребительных числовых множеств:

1) *отрезок* $[a, b] = \{x\colon\ a \leqslant x \leqslant b\}$;

2) *интервал* $(a, b) = \{x\colon\ a < x < b\}$;

3) *полуинтервалы* $[a, b) = \{x\colon\ a \leqslant x < b\}$, $(a, b] = \{x\colon\ a < x \leqslant b\}$.

Точки a и b называют *концами отрезка*, интервала, полуинтервала (a — *левым концом*, b — *правым*); отрезок $[a, b]$, интервал (a, b), полуинтервалы $[a, b)$ и $(a, b]$ называют *конечными промежутками* (или промежутками), а точки x такие, что $a < x < b$, — их *внутренними точками.*

Наряду с конечными промежутками рассматривают также *бесконечные промежутки*:

а) интервалы

$$(a, +\infty) = \{x\colon\ x > a\} \quad \text{и} \quad (-\infty, a) = \{x\colon\ x < a\};$$

б) полуинтервалы

$$[a, +\infty) = \{x\colon\ x \geqslant a\} \quad \text{и} \quad (-\infty, a] = \{x\colon\ x \leqslant a\};$$

в) $(-\infty, +\infty) = \{x\colon\ x \in R\}$ — множество вещественных чисел.

Напомним также, что если каждый элемент множества A является элементом множества B, то пишут $A \subset B$ или $B \supset A$ и говорят, что A является *подмножеством множества* B. Например, $J \subset R$, $Q \subset R$.

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B, называется *объединением множеств* A и B и обозначается $A \cup B$.

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, кото-

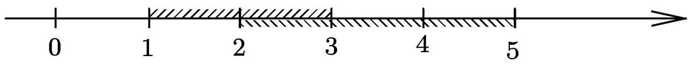

Рис. 1.3

рые принадлежат как множеству A, так и множеству B, называется *пересечением множеств* A и B и обозначается $A \cap B$.

Например, если $A = [1, 3]$, $B = (2, 5)$, то $A \cup B = -[1, 5)$, $A \cap B = (2, 3]$ (рис. 1.3).

Отметим, что

$$J \cup Q = R, \quad J \cap Q = \varnothing,$$

где $\varnothing$ — *пустое множество*, т. е. множество, не содержащее элементов.