

ПРЕДМЕТ: Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Лекция 3

Тема: Скалярное произведение векторов

1. Проекция вектора на ось и ее свойства

Осью называется прямая, на которой указано направление.

Направление оси задается

указанием ненулевого

вектора $\vec{l}$, параллельного (принадлежащего) данной прямой (см. рис. 12).

Углом φ между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется, если не оговорено особо, величина наименьшего угла между равными им векторами, приведенными к общему началу (рис. 12).

Обозначение: $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ или $\varphi = \vec{a}\vec{b}$. Углом между вектором $\vec{a}$ и осью l называется угол

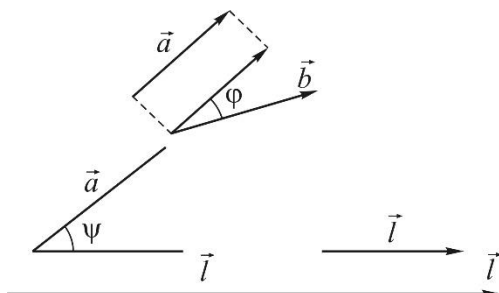


Рис. 12

между векторами $\vec{a}$ и $\vec{l}$, где $\vec{l}$ – вектор, задающий направление оси l (на рис. 12 ψ – угол между $\vec{a}$ и осью l).

Определение 3.1. Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось $\vec{l}$ (вектор $\vec{l}$) называется число $pr_{\vec{l}} \vec{a}$ такое, что

$$pr_{\vec{l}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\vec{a} \vec{l}) = \begin{cases} +|\vec{a}_1|, & \text{если } \vec{a}_1 \uparrow\uparrow \vec{l} \\ -|\vec{a}_1|, & \text{если } \vec{a}_1 \uparrow\downarrow \vec{l}, \end{cases}$$

где $\vec{a}_1$ – вектор, соединяющий проекцию A начала $\vec{a}$ на ось $\vec{l}$ с проекцией B конца $\vec{a}$ на эту же ось (рис. 13).

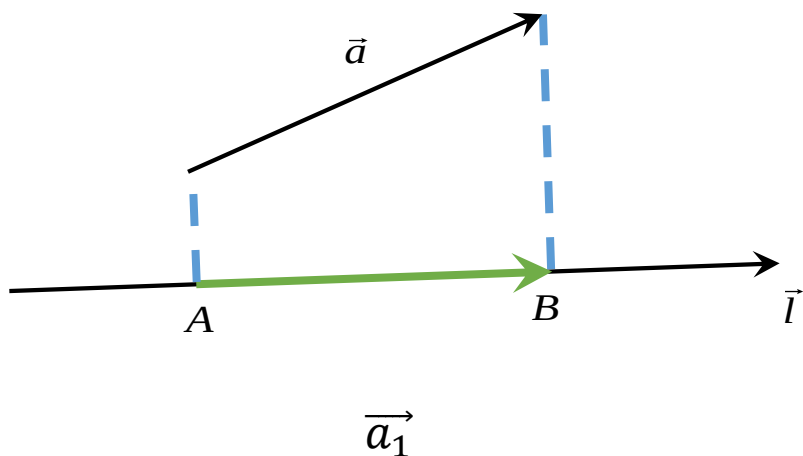


Рис. 13

Геометрический смысл декартовых прямоугольных координат вектора позволяет сделать следующее утверждение.

Теорема 3.1. Декартовы прямоугольные координаты a_1, a_2, a_3 вектора $\vec{a}$ равны проекциям этого вектора на оси Ox, Oy, Oz соответственно.

Доказательство. В полной аналогии с рассуждениями, проведенные при доказательстве теоремы 1.4. (лекция 2), Приведем векторы $\vec{a}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ к общему началу O и проведем через точку M (конец вектора $\vec{a}$) плоскости, параллельные плоскостям, определяемым парами векторов $ХОУ, ХОZ$ и $УОZ$. Точки пересечения указанных плоскостей с осями Ox, Oy, Oz соответственно обозначим через E_1, E_2, E_3 (существование точек E_1, E_2, E_3 вытекает из того, что векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ некопланарны). Из теоремы 1.4 (лекция 2), следует, что $\vec{a} = \overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_3}$. Следовательно, получаем $a_1 \vec{i} = \overrightarrow{OE_1}$, $a_2 \vec{j} = \overrightarrow{OE_2}$, $a_3 \vec{k} = \overrightarrow{OE_3}$.

В рассматриваемом случае декартовой прямоугольной системы параллелепипед, построенный на базисных векторах $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и имеющий вектор $\vec{a}$ своей диагональю, является прямоугольным. Поэтому проекции вектора $\vec{a}$ на оси Ox, Oy, Oz соответственно равны величинам OE_1 , OE_2 , OE_3 . Для доказательства теоремы нам остается убедиться в том, что $OE_1 = a_1$, $OE_2 = a_2$, $OE_3 = a_3$.

Убедимся, например, в равенстве $OE_1 = a_1$. Так как $a_1 \vec{i} = \overrightarrow{OE_1}$ и из того, что $\vec{i}$ – единичный вектор, вытекает, что $|OE_1| = |a_1|$. Но и знаки чисел OE_1 и a_1 совпадают, ибо в случае, когда векторы $\vec{i}$ и $\overrightarrow{OE_1}$ направлены в одну сторону, оба числа OE_1 и a_1 положительны, а в случае, когда векторы $\vec{i}$ и $\overrightarrow{OE_1}$ направлены в противоположные стороны, оба числа OE_1 и a_1 отрицательны. Итак, $OE_1 = a_1$. Аналогично доказываются равенства $OE_2 = a_2$, $OE_3 = a_3$. Теорема 3.1 доказана.

Основные свойства проекции на ось заключаются в том, что линейные операции над векторами приводят к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов (на произвольную ось).

Свойство проекций. 1) При сложении двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ их проекции на произвольную ось l складываются

$$np_l(\vec{a} + \vec{b}) = np_l \vec{a} + np_l \vec{b}.$$

2) При умножении вектора $\vec{a}$ на любое число λ проекция этого вектора на произвольную ось l также умножается на число λ

$$np_l(\lambda \vec{a}) = \lambda np_l \vec{a}.$$

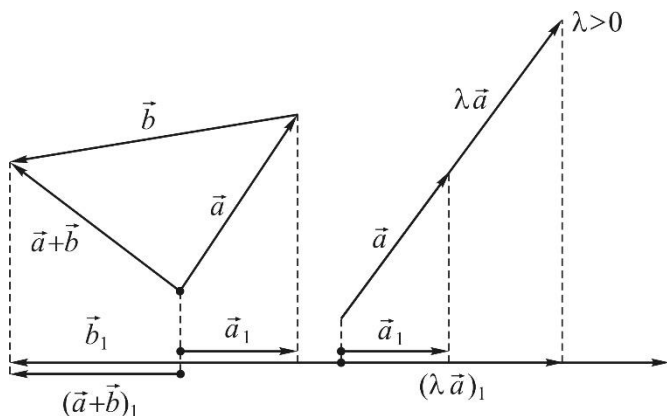


Рис. 14

Доказательство. Пусть дана произвольная ось l и любые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Введем декартовы прямоугольные координаты так, чтобы ось l совпала с осью Ox .

Пусть

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \quad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}.$$

Тогда в силу правила 1.1. (лекция 2)

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$$

$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1)\vec{i} + (\alpha a_2)\vec{j} + (\alpha a_3)\vec{k}.$$

Но в силу теоремы 3.1 и того, что ось l совпадает с осью Ox , можно утверждать, что

$$a_1 = np_l \vec{a}, \quad a_2 = np_l \vec{b}$$

$$np_l (\vec{a} + \vec{b}) = a_1 + b_1 = np_l \vec{a} + np_l \vec{b}$$

$$\alpha a_1 = np_l (\alpha \vec{a}) = \alpha np_l \vec{a}.$$

$$\text{Таким образом, } np_l (\vec{a} + \vec{b}) = np_l \vec{a} + np_l \vec{b}$$

$\alpha a_1 = \alpha np_l \vec{a}$, и сформулированное свойство доказано.

2. Определение скалярного произведения и его геометрические свойства

Определение 3.2. Скалярным произведением $\vec{x} \vec{y}$ двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$

называется действительное число (скаляр), равное произведению их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{x} \vec{y} = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos(\vec{x} \vec{y}).$$

Иногда обозначают $\vec{x} \vec{y} = (\vec{x}, \vec{y})$.

Геометрические свойства:

1) $\vec{x} \vec{y} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$ ($\vec{x}$ ортогонален $\vec{y}$) (считаем, что нулевой вектор ортогонален любому вектору);

$$2) \vec{x} \vec{y} = |\vec{x}| n p_{\vec{x}} \vec{y} = |\vec{y}| n p_{\vec{y}} \vec{x}.$$

Доказательство.

1. Свойство следует из определения.

2. Согласно первому определению проекции вектора на ось имеем:

$$n p_{\vec{x}} \vec{y} = |\vec{y}| \cos(\vec{x} \vec{y}); \quad n p_{\vec{y}} \vec{x} = |\vec{x}| \cos(\vec{x} \vec{y}).$$

Из этих равенств, в силу определения скалярного произведения, следует 2. #

Из 2 получаем

правило 1. Скалярное произведение двух векторов равно модулю одного вектора, умноженному на проекцию второго вектора на предыдущий.

3. Алгебраические свойства скалярного произведения

Пусть $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ – любые векторы, а λ, μ – произвольные вещественные числа. Тогда

$$1) \vec{x} \vec{x} \geq 0, \quad \vec{x} \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0};$$

2) $\vec{x} \vec{y} = \vec{y} \vec{x}$ (коммутативность или симметрия);

3) $(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) \vec{z} = \lambda (\vec{x} \vec{y}) + \mu (\vec{y} \vec{z})$ (линейность по первому множителю).

Доказательство.

$$1) \vec{x} \vec{x} = |\vec{x}|^2 \geq 0, \quad (\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow |\vec{x}|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

2. Следует из определения скалярного произведения.

3. Из геометрических свойств скалярного произведения и свойства проекций имеем:

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) \vec{z} &= |\vec{z}| n p_{\vec{z}} (\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = |\vec{z}| (\lambda n p_{\vec{z}} \vec{x} + \mu n p_{\vec{z}} \vec{y}) = \\ &= \lambda (|\vec{z}| n p_{\vec{z}} \vec{x}) + \mu (|\vec{z}| n p_{\vec{z}} \vec{y}) = \lambda (\vec{x} \vec{z}) + \mu (\vec{y} \vec{z}). \quad \# \end{aligned}$$

Замечание 3.1. Из 2) и 3) следует, что $\vec{x} \vec{y}$ линейно и по второму множителю.

Имеет место следующая лемма.

Основная лемма 3.1. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два заданных вектора. Если для любого вектора $\vec{x}$: $\vec{a} \vec{x} = \vec{b} \vec{x}$, то $\vec{a} = \vec{b}$.

Доказательство. Условие леммы запишем в виде: $\forall \vec{x}: (\vec{a} - \vec{b})\vec{x} = 0$. Полагая $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$, получаем $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}. \#$

4. Свойства модуля вектора и свойства расстояния между векторами

Из определения скалярного произведения следует предложение.

Предложения. Для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеем:

$$1) |\vec{x}|^2 = \vec{x}\vec{x}, \quad |\vec{x}| = (\vec{x}\vec{x})^{1/2};$$

$$2) \cos(\vec{x}\vec{y}) = \frac{\vec{x}\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|};$$

3) $|\vec{x}\vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$ (неравенство Буняковского–Шварца). Равенство в последней формуле имеет место тогда и только тогда, когда $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны. #

Для модуля вектора справедливы следующие свойства.

Основные алгебраические свойства модуля.

Пусть $\vec{x}, \vec{y}$ – произвольные векторы, а λ – произвольное вещественное число. Тогда

$$1) |\vec{x}| \geq 0, |\vec{x}| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0},$$

$$2) |\lambda \vec{x}| = |\lambda| |\vec{x}| \text{ (однородность модуля);}$$

$$3) |\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}| \quad - \quad \text{неравенство треугольника.}$$

Доказательство. Свойства 1) и 2) следуют из алгебраических свойств скалярного произведения и равенства $|\vec{x}| = (\vec{x}\vec{x})^{1/2}$.

Свойство 3) следует из неравенства Буняковского—Шварца. Оно вытекает из следующей цепочки соотношений:

$$\begin{aligned} |\vec{x} + \vec{y}|^2 &= (\vec{x} + \vec{y})(\vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}\vec{x}) + 2(\vec{x}\vec{y}) + (\vec{y}\vec{y}) \leq |\vec{x}|^2 + \\ &+ 2|\vec{x}||\vec{y}| + |\vec{y}|^2 = (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2. \end{aligned}$$

Знак равенства в 3 достигается $\Leftrightarrow \vec{x}\vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|$
 $\Leftrightarrow$, когда угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ равен нулю. #

Задача 1.1. Доказать, что для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ справедливы неравенства:

$$||\vec{x}| - |\vec{y}|| \leq |\vec{x} - \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

Определение 3.3. Вещественное число $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}|$ называется расстоянием между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

Из определения и алгебраических свойств модуля вектора следует, что расстояние между векторами удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) $\rho(\vec{x}, \vec{y}) > 0$, если $\vec{x} \neq \vec{y}$ и $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$;
- 2) для $\forall \vec{x}, \vec{y}$: $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \rho(\vec{y}, \vec{x})$;
- 3) для $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$: $\rho(\vec{x}, \vec{y}) \leq \rho(\vec{x}, \vec{z}) + \rho(\vec{z}, \vec{y})$. #

5. Координатная запись скалярного произведения

Все рассуждения проведем в ЛПСВ V_3 (для V_1 и V_2 – выкладки проводятся аналогично).

Пусть $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ – базис V_3 . Тогда можем любые векторы $\vec{x}$ и $\vec{y} \in V_3$ записать в виде:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^3 x_j \vec{l}_j, \quad \vec{y} = \sum_{k=1}^3 y_k \vec{l}_k.$$

Пользуясь свойством линейности скалярного произведения по каждому множителю, получаем

$$\vec{x}\vec{y} = \left(\sum_{j=1}^3 x_j \vec{l}_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^3 y_k \vec{l}_k \right) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\vec{l}_j \vec{l}_k) x_j y_k$$

ИЛИ

$$\vec{x}\vec{y} = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{jk} x_j y_k,$$

где $\varepsilon_{jk} = \vec{l}_j \vec{l}_k$. Если $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ — ортонормированный базис, т.е.

$$\vec{l}_j \vec{l}_k = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

то получим

$$1) \vec{x}\vec{y} = \vec{x}_1 \vec{y}_1 + \vec{x}_2 \vec{y}_2 + \vec{x}_3 \vec{y}_3 = \sum_{k=1}^3 x_k y_k;$$

$$2) |\vec{x}| = (\vec{x}\vec{x})^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2};$$

$$3) \cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}};$$

4) $|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$ — расстояние между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

6. Некоторые свойства ОНБ. Направляющие косинусы вектора

Пусть $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ — ОНБ в V_3 . Тогда для любого вектора $\vec{a} \in V$ справедливо разложение $\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{l}_i$, причем очевидно, что

1) $a_k = \vec{a} \vec{l}_k = n p_{\vec{l}_k} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi_k$, где $\varphi_k = \angle(\vec{a}, \vec{l}_k)$,
 $k = 1, 2, 3$, числа $\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \cos \varphi_3$ принято
 называть направляющими косинусами вектора
 $\vec{a} \neq \vec{0}$;

2) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$;

3) $\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Следствие 1.8. В ОНБ вектор однозначно
 определяется заданием его длины и трех
 направляющих косинусов.

Замечание 1.10. Аналогичные свойства
 справедливы и в V_2 .

Задачи к лекции 2

1) Даны три последовательные вершины
 параллелограмма $A(-2; 1)$, $B(1; 3)$, $C(4; 0)$. Найти
 четвертую его вершину D .

2) В пространстве выбран некоторый базис,
 относительно которого $\vec{a} = (1; 1; 1)$; $\vec{b} = (1; 2; 3)$;
 $\vec{c} = (1; 2; 1)$. Являются ли эти три векторы линейно
 зависимыми.

3) Определить начало вектора $\vec{a} = (2; 3; -1)$, если
 конец его совпадает с точкой $B = (1; 1; 2)$.

4) Найти центр тяжести системы трех одинаковых масс, сосредоточенных в точках $A(0; 0)$; $B(4; 2)$; $C(2; 4)$.

5) Найти угол α при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы BF и AE , проведенные из концов основания этого треугольника взаимно перпендикулярны.

6) Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы имели место следующие соотношения:

а) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$;

б) $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$;

в) $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$.

7) Даны вершины треугольника $A(-1; -2; 4)$; $B(-4; -2; 0)$; $C(3; -2; 1)$. Найти

а) внешний угол при вершине C ;

б) проекцию медианы $\overline{AM}$ на сторону BC .