Лекция 4

§ 6. Некоторые задачи аналитической геометрии в пространстве и на плоскости

1. Объем тетраэдра

Поставим задачу: вычислить объем тетраэдра, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, заданных в некотором ОНБ своими координатами $\vec{a}=(x_1,\ y_1, z_1)$, $\vec{b}=(x_2,\ y_2, z_2)$, $\vec{c}=(x_3,\ y_3, z_3)$

Очевидно,

$$V=\frac{1}{6}\left|(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}$$

2. Площадь треугольника

Пусть на плоскости задана декартовая прямоугольная система координат OXY и в этой системе координат заданы три точки $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ и $P_3(x_3, y_3)$. Требуется найти площадь треугольника с вершинами в точках P_1, P_2 и P_3. Для решения этой задачи рассмотрим на плоскости два вектора $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ и $\overrightarrow{P_1P_3}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1)$. В пространстве V_2 векторное произведение не определено. Но ничто не мешает считать, что наша плоскость V_2 помещена в пространство V_3 и третий базисный вектор выбран перпендикулярно плоскости и имеет единичную длину. Тогда площадь треугольника

$$S=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3}]\right|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0\end{vmatrix}.$$

3. Деление отрезка в данном отношении

Пусть в пространстве V_m (m – фиксировано, m = 1, 2, 3) задана декартовая прямоугольная система координат и две точки A и B.

Условимся называть величиной направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ некоторой оси число, равное его длине, взятой со знаком плюс, если направление этого отрезка совпадает с направлением оси, и со знаком минус, если оно противоположно направлению оси. Величину направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ будем обозначать AB (очевидно, $AB = -BA$).

Пусть на некоторой оси l задан направленный отрезок AB и точка M, принадлежащая этой оси ($M \neq B$), тогда число λ, определяемое равенством $\lambda = \frac{AM}{MB}$, где AM и MB – величины направленных отрезков $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ оси l, называется отношением, в котором точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$.

Задача аналитической геометрии о делении отрезка в данном отношении состоит в следующем.

Считая известными координаты двух точек A и B и отношение λ, в котором некоторая (неизвестная) точка M делит отрезок $\overrightarrow{AB}$, найти координаты точки M (рис. 20). Решим задачу в V_3 (в V_1 и V_2 задача решается аналогично).

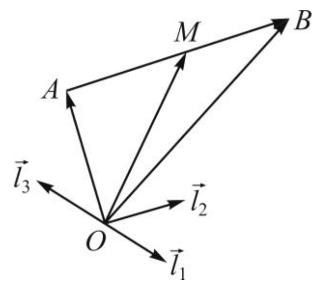

Рис. 20

Пусть координаты точек A, B равны соответственно (α_1, α_2, α_3) и (β_1, β_2, β_3) Координаты неизвестной точки M обозначим через $(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Так как $\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{MB}$, то $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$. Следовательно, $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$ или, $x_k = \frac{\alpha_k + \lambda\beta_k}{1+\lambda}$, $k = 1, 2, 3$.

4. Двойное векторное произведение

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – векторы из V_3. Выражение $[\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}]$ называется двойным векторным произведением.

Утверждение 1.5. $[\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}\,]=\vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}\,)-\vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b}\,)=\begin{vmatrix}\vec{b} & \vec{c}\\ (\vec{a}\,\vec{b}) & (\vec{a}\,\vec{c})\end{vmatrix}$.

Для запоминания формулы удобно правило: двойное векторное произведение равно среднему вектору, умноженному на скалярное произведение двух остальных, минус другой вектор внутреннего произведения, умноженный на скалярное произведение двух остальных.

Доказательство. Введем специальную декартову прямоугольную систему координат. Ось OZ направим по вектору $\vec{c}$, а ось OY поместим в плоскости векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (считаем, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ приведены к общему началу). В таком случае будем иметь:

$$\vec{a}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3),\ \ \vec{b}=(0,\ \beta_2,\ \beta_3),\ \ \vec{c}=(0,\ 0,\ \gamma_3)\,.$$

Теперь находим:

$$[\vec{b}\,\vec{c}\,]=(\beta_2\gamma_3,\ 0,\ 0)\,;$$

$$[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}\,]]=(0,\ \alpha_3\beta_2\gamma_3,\ -\alpha_2\beta_2\gamma_3) \qquad (1.21)$$

С другой стороны,

$$\vec{a}\,\vec{c}=\alpha_3\gamma_3\,; \qquad \vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}\,)=(0,\ \alpha_3\beta_2\gamma_3,\ \alpha_3\beta_3\gamma_3)$$

$$\vec{a}\,\vec{b}=(\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)\,; \qquad \vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b}\,)=(0,\ 0,\ \alpha_2\beta_2\gamma_3,\ -\alpha_3\beta_3\gamma_3)\,.$$

Следовательно,

$$\vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}\,)-\vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b}\,)=(0,\ \alpha_3\beta_2\gamma_3,\ -\alpha_2\beta_2\gamma_3)\,. \qquad (1.22)$$

Сравнивая правые части формул (1.21) и (1.22), получаем

$$[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}\,]]=\vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}\,)-\vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b}\,)\,.\ \#$$

§ 7. Преобразование аффинных координат на плоскости и в пространстве

Пусть V_m – пространство свободных векторов (m = 2, 3, m фиксировано) и пусть в пространстве V_m заданы две системы координат (не обязательно декартовые прямоугольные).

Первая, определяемая началом O и базисными векторами $\vec{l}_1,...,\vec{l}_m$, и вторая, определяемая началом O' и базисными векторами $\vec{l}\,'_1,...,\vec{l}\,'_m$. Пусть M – произвольная точка, координаты ее в этих системах обозначены соответственно $(x_1, ..., x_m)$ и $(x'_1, ..., x'_m)$. Поставим перед собой задачу выразить $(x_1, ..., x_m)$ через $(x'_1, ..., x'_m)$, считая известным положение второй системы координат относительно первой, т.е. заданы координаты $a_1, ..., a_m$ нового начала координат O' и координаты базисных векторов $\vec{l}'_1, ..., \vec{l}'_m$ в первом базисе:

$$\begin{cases} \vec{l}' = t_{11}\vec{l}_1 + \ldots + t_{m1}\vec{l}_m ; \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \vec{l}'_m = t_{1m}\vec{l}_1 + \ldots + t_{mm}\vec{l}_m . \end{cases} \tag{1.23}$$

Матрица

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & . \; . \; . & t_{1m} \\ . \; . \; . & . \; . \; . & . \; . \; . \\ t_{m1} & . \; . \; . & t_{mm} \end{bmatrix}$$

называется матрицей перехода от старого базиса к новому.

В силу правила сложения векторов (рис. 21) имеем $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$.

Подставляя в это равенство выражения:

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{j=1}^{m} x_j \vec{l}_j ;$$

$$\overrightarrow{OO'} = \sum_{j=1}^{m} a_j \vec{l}_j ;$$

$$\overrightarrow{O'M} = \sum_{j=1}^{m} x'_j \vec{l}'_j$$

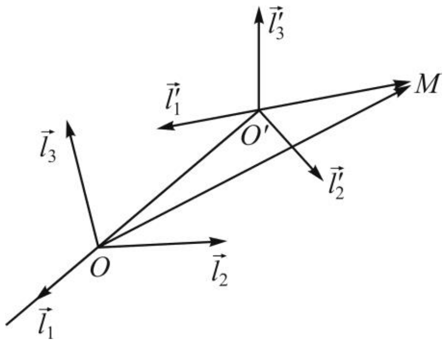

Рис. 21

и воспользовавшись формулами (1.23), получаем

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \vec{l}_j = \sum_{j=1}^{m} a_j \vec{l}_j + \sum_{k=1}^{m} x'_k \vec{l}'_k = \sum_{j=1}^{m} a_j \vec{l}_j + \sum_{k=1}^{m} x'_k \left(\sum_{j=1}^{m} t_{jk} \vec{l}_j \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(a_j + \sum_{k=1}^{m} t_{jk} x'_k \right) \vec{l}_j .$$

или $$\sum_{j=1}^{m} x_j \vec{l}_j = \sum_{j=1}^{m} \left(a_j + \sum_{k=1}^{m} t_{jk}\, x'_k \right) \vec{l}_j .$$

Из единственности разложения по базису следует, что

$$x_j = a_j + \sum_{k=1}^{m} t_{jk}\, x'_k , \quad j = 1,\dots, m. \tag{1.24}$$

Приходим к следующему выводу: каковы бы ни были две произвольные аффинные системы координат в пространстве V_m $(m = 2, 3)$ координаты любой точки пространства V_m относительно первой системы являются линейными функциями координат той же точки относительно второй системы.

Очевидно, изменение системы координат можно произвести в два этапа: сначала изменить только начало координат, не изменяя базис, т.е. перейти к системе координат $O',\ \vec{l}_1,\dots, \vec{l}_m$, а затем перейти к новому базису, не меняя начала. На первом этапе формулы преобразования координат имеют вид:

$$x_1 = a_1 + \tilde{x}_1 ,\dots,\ x_m = a_m + \tilde{x}_m , \tag{1.25}$$

где $x_1,\dots,\ x_m$ – координаты точки M в системе $O,\ \vec{l}_1,\dots, \vec{l}_m$, $\tilde{x}_1,\dots,\ \tilde{x}_m$ – координаты этой же точки в системе $O',\ \vec{l}_1,\dots, \vec{l}_m$.

Формулы (1.25) называются формулами преобразования координат при параллельном переносе системы вдоль вектора $\overrightarrow{OO'} = (a_1 \dots a_m)$. На втором этапе формулы преобразования координат имеют вид:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = t_{11}\, x'_1 + \dots + t_{1m}\, x'_m ; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{x}_m = t_{m1}\, x'_1 + \dots + t_{mm}\, x'_m . \end{cases} \tag{1.26}$$

Здесь $\tilde{x}_1,\dots,\ \tilde{x}_m$ по-прежнему обозначают координаты точки M в системе $O',\ \vec{l}_1,\dots, \vec{l}_m$, а через $x'_1,\dots,\ x'_m$ обозначены ее координаты в системе $O',\ \vec{l}'_1,\dots, \vec{l}'_m$.

Матрица $$T = \begin{bmatrix} t_{11} \dots t_{1m} \\ \dots\dots \\ t_{m1} \dots t_{mm} \end{bmatrix}$$

является матрицей перехода от новых координат к старым.

Итак, видим, что матрица T перехода от старого базиса к новому является в то же время матрицей перехода от новых координат к старым.

Преобразование координат точки при повороте декартовой системы координат на угол φ.

<u>Определение 1.19.</u> Система координат $O, \vec{l}_1, \vec{l}_2$ на плоскости называется правой (левой), если кратчайший поворот от $\vec{l}_1$ к $\vec{l}_2$ совершается против часовой стрелки (по часовой стрелке). Пусть $O', \vec{l}_1, \vec{l}_2$ и $O', \vec{l}_1', \vec{l}_2'$ две декартовые прямоугольные системы координат. Через φ обозначим угол между векторами $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_1'$, отсчитываемый в направлении кратчайшего поворота от $\vec{l}_1$ к $\vec{l}_2$. Возможны два существенно различных случая: 1) системы $O', \vec{l}_1, \vec{l}_2$ и $O', \vec{l}_1', \vec{l}_2'$ одной ориентации (обе правые, или обе левые)

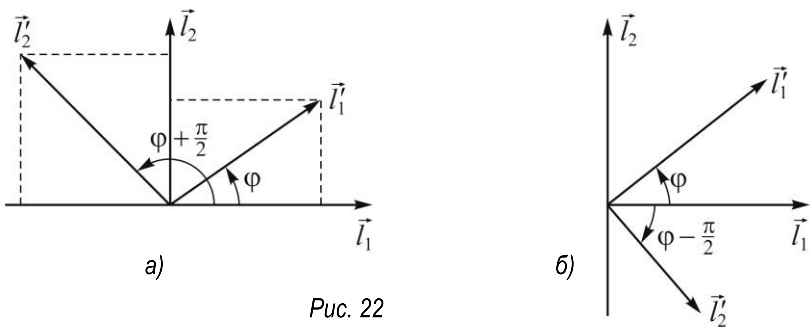

Рис. 22

(рис. 22, а); 2) системы $O', \vec{l}_1, \vec{l}_2$ и $O', \vec{l}_1', \vec{l}_2'$ – разной ориентации (рис. 22, б). В первом случае очевидно (см. рис. 22, а),

$$\begin{cases} \vec{l}_1' = \cos\varphi\,\vec{l}_1 + \sin\varphi\,\vec{l}_2; \\ \vec{l}_2' = -\sin\varphi\,\vec{l}_1 + \cos\varphi\,\vec{l}_2, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Из (1.26) получаем:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \cos\varphi\, x_1' - \sin\varphi\, x_2'; \\ \tilde{x}_2 = \sin\varphi\, x_1' + \cos\varphi\, x_2'. \end{cases} \tag{1.27}$$

Формулы (1.27) носят название формул преобразования координат при повороте системы вокруг начала на угол φ.

Из (1.25) и (1.26) следует, что формулы преобразования координат точки в общем случае при переходе от одной декартовой прямоугольной системы к другой, имеющей ту же ориентацию, имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \cos\varphi\, x_1' - \sin\varphi\, x_2'; \\ x_2 = a_2 + \sin\varphi\, x_1' + \cos\varphi\, x_2'. \end{cases}$$

Замечание 1.11. Если декартовые прямоугольные системы $O,\ \vec{l}_1,\ \vec{l}_2$ и $O',\ \vec{l}_1',\ \vec{l}_2'$ – разной ориентации, то аналогичными рассуждениями можно показать (см. рис. 22, б), что формулы преобразования координат имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + x_1'\cos\varphi + x_2'\sin\varphi; \\ x_2 = a_2 + x_1'\sin\varphi - x_2'\cos\varphi. \end{cases}$$

§ 8. Полярные, цилиндрические и сферические координаты

1. Полярные координаты

Для определения системы полярных координат на плоскости надо задать: масштаб (т.е. единицу измерения длины), точку O (называемую полюсом системы координат) и исходящий из полюса луч l, который называется полярной осью. Координаты точки M определяются двумя числами (рис. 23): радиусом $r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ и углом φ (полярным углом) между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемым от полярной оси против хода часовой стрелки. Упорядоченная пара (r, φ) называется полярными координатами точки M (обозначение $M(r, \varphi)$). Отметим, что координатные линии $\rho = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ есть соответственно окружность радиуса ρ и луч, выходящий из полюса под углом φ к полярной оси. У полюса O $r = 0$, φ не определено.

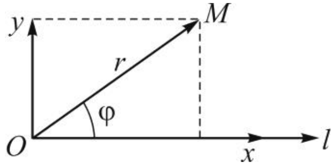

Рис. 23

Для того чтобы соответствие между точками плоскости (отличными от полюса) и парами (r, φ) было взаимно однозначным, обычно полагают, что r и φ изменяются в следующих пределах: $0 < r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Правда, иногда бывает целесообразным считать полярный угол точки определенным лишь с точностью до слагаемых вида $2\pi k$ (где k – любое целое число), а r – принимающим любые действительные значения (например, в задачах, связанных с непрерывным движением точки по плоскости: движение по окружности, по прямой, проходящей через полюс, и т.п.). Очевидно (см. рис. 23), любой полярной системе координат на плоскости соответствует единственная правая декартовая прямоугольная система координат с тем же масштабом, начало которой совпадает с полюсом, а ось абсцисс – с полярной осью и, обратно, по любой правой декартовой прямоугольной системе координат однозначно определяем полярную систему, сохраняя в ней масштаб и начало координат, объявляя полюсом и требуя, чтобы полярная ось совпадала с осью абсцисс. Посмотрим, как связаны между собой координаты x, y и r, φ какой-нибудь точки M плоскости в обеих системах. Очевидно (см. рис. 23),

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{1.28}$$

Они позволяют от полярных координат точки M перейти к декартовым прямоугольным. Из них же можно получить и обратный переход:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ если } (x, y) \text{ лежит в I четверти, } x \neq 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, \text{ если } (x, y) \text{ лежит во II и III четверти, } x \neq 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + 2\pi, \text{ если } (x, y) \text{ лежит во IV четверти, } x \neq 0; \\ \text{при } x = 0, \ y > 0 \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}; \\ \text{при } x = 0, \ y < 0 \quad \varphi = \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases} \qquad (1.29)$$

2. Цилиндрические координаты

Для определения цилиндрической системы координат в пространстве надо задать: плоскость π, называемую основной, с выбранной на ней полярной системой координат, масштаб, т.е. единицу измерения длины, и ось OZ, проходящую через полюс и перпендикулярную к основной плоскости. Тогда цилиндрическими координатами точки M (рис. 24), не лежащей на оси OZ, называются тройка чисел (r, φ, z) (обозначение M (r, φ, z)), где (r, φ) – полярные координаты точки M_0 (ортогональной проекции точки M на основную плоскость), а $z = pr_{\overline{OZ}}\,\overrightarrow{OM}$. Для точки M, лежащей на оси OZ, угол φ не определен. Отметим, что координатные поверхности $r = \text{const}$, $z = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ есть соответственно: цилиндрическая поверхность, прямолинейные, образующие которой параллельны оси OZ; плоскость, параллельная основной плоскости π; полуплоскость, «выходящая» из оси OZ под углом φ к полярной оси OX.

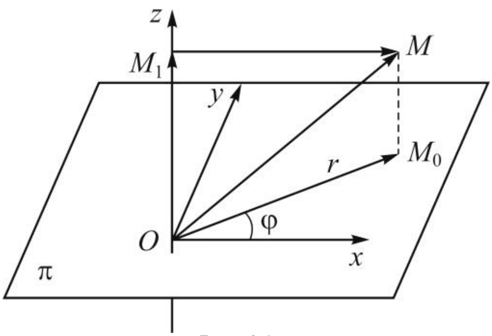

Рис. 24

Если взять декартовую прямоугольную систему координат, порожденную данной цилиндрической системой координат, т.е. такую декартовую прямоугольную систему, начало которой совпадает с полюсом *O*, ось *OX* совпадает с полярной осью, ось *OY* получается из *OX* поворотом (в основной плоскости π) в положительном направлении на угол φ, а ось *OZ* совпадает с осью *OZ* цилиндрической системы координат, то координаты (x, y, z) точки *M* в этой системе связаны с цилиндрическими координатами r, φ, z этой же точки следующими соотношениями (см. рис. 24):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Эти равенства позволяют от цилиндрических координат точки *M* перейти к декартовым прямоугольным. Обратный переход дается формулами (1.29).

3. Сферические координаты

Для определения сферической системы координат в пространстве, так же как и для цилиндрической, надо задать: плоскость π, называемую основной, с выбранной на ней полярной системой координат, масштаб, т.е. единицу измерения длины, и ось *OZ*, проходящую через полюс и перпендикулярную к основной плоскости.

Сферическими координатами точки *M*, не лежащей на оси *OZ* (рис. 25) называются три числа ρ, φ, θ (обозначение $M(\rho, \varphi, \theta)$), где $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$, долгота φ – полярный угол ортогональной проекции M_0 точки *M* на основную плоскость относительно данной в этой плоскости полярной системы координат $(0 \le \varphi < 2\pi)$, широта θ точки *M* – это угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью *OZ* $(0 \le \theta \le \pi)$. Для точки *M*, лежащей на оси *OZ*,

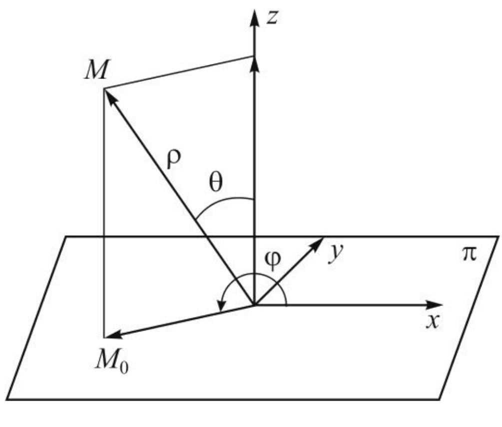

Рис. 25

угол φ не определен и для полюса *O* угол θ не определен. Отметим, что координатные поверхности ρ = const, φ = const и θ = const есть соответственно: сфера; полуплоскость, выходящая из оси *OZ* под углом φ к полярной оси *OX*; коническая поверхность с вершиной в полюсе.

Если взять декартовую прямоугольную систему координат, порожденную данной сферической системой координат, т.е. такую декартовую прямоугольную систему, начало которой совпадает с полюсом *O*, ось *OX* совпадает с полярной осью, ось *OY* получается из *OX* поворотом (в основной плоскости π) в положительном направлении на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а ось *OZ* совпадает с осью *OZ* сферической системы координат, то прямоугольные координаты *x*, *y*, *z* точки *M* связаны с сферическими координатами ρ, φ, θ этой же точки (рис. 25) следующими соотношениями: $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \rho \cos\theta$. Эти формулы позволяют выразить *x*, *y*, *z* через ρ, φ, θ и обратно.

Задачи к лекции 4

1) Найти объём параллелепипеда, заданного вершинами *A*(0;0;0), *B*(2;1;0), *C*(2;1;0), *D*(0;0;6).

2) Найти объём параллелепипеда, заданного вершинами *A*(0;0;0), *B*(4;1;1), *C*(1;1;0), *D*(0;0;8).

3) Проверить компланарны ли векторы $\vec{a} = 2i + 3j - k$, $\vec{b} = i - j + k$, $\vec{c} = i + j - 11k$.

4) Проверить компланарны ли векторы $\vec{a} = i + j$, $\vec{b} = j$, $\vec{c} = i + j + k$.

5) Записать кривую в полярных координатах и изобразить на плоскости Oxy:

а) $x^2 + y^2 = 25$;

б) $x^2 + y^2 = 2x$;

в) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2xy$;

г) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2\left(x^2 - y^2\right);$

6) Записать поверхность в цилиндрических или сферических координатах и изобразить в пространстве $Oxyz$:

а) а) $x^2 + y^2 + z^2 = 25;$

б) $x^2 + y^2 = z;$

в) $x^2 + y^2 = z^2.$