**Тема:** Случайные события. Вероятностное пространство. Определение вероялностей . Элементы комбинаторики.

1. Понятие о случайном событии.
2. Определении вероятности.
3. Аксиомы Колмогорова.
4. Элементы комбинаторики.

## Понятие о случайном событии

Наблюдаемые нами явления, опыт, эксперимент, которые можно провести многократно, в теории вероятностей принято называть *испытанием*. Примеры: сдача экзамена, наблюдение за дорожно-транспортными происшествиями, выстрел из винтовки, бросание игрального кубика, педагогический эксперимент.

Результат, исход испытания называется *событием*. Случайным называют событие, которое при осуществлении совокупности условий можеть либо произойти, либо не произойти. Например: успешная сдача экзамена, дорожно-транспортные происшествия со смертельным исходом, попадание в цель при стрельбе, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости, получение результата при проведении педагогического эксперимента.

Два события называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании. ***Примеры:*** *совместные события*: идет дождь и идет снег, человек ест и человек читает, число целое и четное; *несовместные события*: день и ночь, человек читает и человек спит, число иррациональное и четное.

Два события называются *противоположными*, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит. ***Примеры***: если сейчас день, то сейчас не ночь; если человек спит, то в данный момент он не читает; если число иррациональное, то оно не является четным. Появление герба и надписи при бросании монеты.

Событие называется *достоверным*, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом. Событие называется *невозможным*, если в данном испытании оно заведомо не может произойти. ***Примеры***: если в урне все шары белые, то достать белый шар является достоверным событием, а достать черный шар является невозможным событием; если человек прыгнул в воду, то выйти мокрым является достоверным событием, а выйти сухим является невозможным событием.

Событие называется *случайным*, если его наступление или ненаступление в некотором испытании (эксперименте) зависит от ряда случайных факторов. ***Примеры***: успешная сдача экзамена; выигрыш в лотерее; рождения мальчика или девочки; всхожесть семян; попадание в цель и т. д.

## Определение вероятности

Совокупность образует полную *группу событий* для данного испытания, если его результатом обязательно становится хотя бы одно из них. Например, при сдаче зачета возможны следующие исходы: "зачтено", "не зачтено", "не явился"; при подбрасывании монеты - "орел", "решка"; при подбрасывании игральной кости - 1, 2, 3, 4, 5, 6.

События, образующие полную группу попарно несовместных и равновозможных событий, будем называть *элементарными* событиями.

## Классическое определение вероятности.

Вероятность – одно из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений вероятности.

*Вероятностью P(A)* события A называется отношение числа элементарных событий m, благоприятствующих событию A, к числу всех элементарных событий n:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Из определении вероятности вктекает следуюўие ее свойства:

*Свойства 1.* Вероятность достоверного события равна единице $P(A) = 1$.

*Свойства 2.* Вероятность невозможного события равна нулю $P(A) = 0$.

*Свойства 3.* Вероятность случайного события есть положительное число заключенной между нулем и единицей $0 \leq P(A) \leq 1$.

Пример №1. В урне 10 красных, 5 синих и 3 черных шара. Из урны наудачу извлекли один шар. Найти вероятность того, что взятый шар будет черным.

Решение: В урне всего 18 шаров, из которых благоприятствующих появления событию 3 черных шара: $P(A) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

## Статистическое определение вероятности

Классическое определение вероятности не является пригодным для изучения произвольных случайных событий. Например, оно неприемлемо, если результаты испытания не равновозможны. В таких случаях используется статистическое определение вероятности. Пусть проводится $n$ опытов, событие А наступило $\mu$ раз, тогда

$$P(A) = \frac{\mu}{n}$$

где $\mu$ - абсолютная частота события А; P(A) - относительная частота события А.

Вероятностью события А для испытания в данном опыте называется число P(A), около которого группируются значения относительной частоты при больших n.

Пример № 2. Монету бросали 150 раз. Со стороной герба выпал 80 раз.. Найти вероятность того, монета выпала со сторной герба.

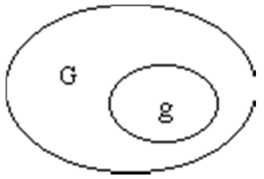
Решение: $P(A) = \frac{\mu}{n} = \frac{80}{150} = \frac{8}{15}$

## Геометрическое определение вероятности

Если в результате проведения испытаний наблюдается произвольный исход из некоторого бесконечного множества, то можно сказать, что пространство элементарных исходов может быть некоторой областью G, а под событием А можно понимать исходы, входящие в область g. Пусть на область G наугад брошена "точка"; приняв равновозможность вариантов, естественно считать, что вероятность попадания в область g можно найти по формуле, называемой геометрической вероятностью:

$$P(A) = \frac{mes\,g}{mes\,G}$$

Области могут быть различной размерности (одно-, двух- или трехмерного измерения) и, в зависимости от выбора размерности меры, могут принимать значения либо длины, либо площади, либо объема. Для конкретного испытания размерность мер g и G должна быть одна.



Построение логически полноценной теории вероятности на аксиоматическом определении случайного события и его вероятности. В системе предложенной А.Н.Колмогоровым неопределяемыми понятиями является элементарное событие вероятность.

Аксиомы определяющие вероятность:

1. Каждому событию А поставлено в соответствие неотрицательное действительное числа Р(А).
2. Вероятность достоверного события равна единице: $P(\Omega)=1$.
3. Вероятность наступления хотя бы одного из попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

**Комбинаторика. Размещения, перестановки, сочетания**

В комбинаторике изучают вопросы о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных элементов.

Рождение комбинаторики как раздела математики связано с трудами Б. Паскаля и П. Ферма по теории азартных игр. Большой вклад в развитие комбинаторных методов внесли Г.В. Лейбниц, Я. Бернулли и Л. Эйлер.

Французский философ, писатель, математик и физик Блез Паскаль (1623–1662) рано проявил свои выдающиеся математические способности. Круг математических интересов Паскаля был весьма разнообразен. Паскаль доказал одну из основных теорем проективной геометрии (теорема Паскаля), сконструировал суммирующую машину (арифмометр Паскаля), дал способ вычисления биномиальных коэффициентов (треугольник Паскаля), впервые точно определил и применил для доказательства метод математической индукции, сделал существенный шаг в развитии анализа бесконечно малых, сыграл важную роль в зарождении теории вероятности. В гидростатике Паскаль установил ее основной закон (закон Паскаля). "Письма к провинциалу" Паскаля явились шедевром французской классической прозы.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) — немецкий философ, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед. В математике наряду с И. Ньютоном разработал дифференциальное и интегральное исчисление. Важный вклад внес в комбинаторику. С его именем, в частности, связаны теоретико-числовые задачи.

Готфрид Вильгельм Лейбниц имел мало внушительную внешность и поэтому производил впечатление довольно невзрачного человека. Однажды в Париже он зашел в книжную лавку в надежде приобрести книгу своего знакомого философа. На вопрос посетителя об этой книге книготорговец, осмотрев его с головы до ног, насмешливо бросил: “Зачем она вам? Неужели вы способны читать такие книги?” Не успел ученый ответить, как в лавку вошел сам автор книги со словами: “Великому Лейбницу привет и уважение!” Продавец никак не мог взять втолк, что перед ним действительно знаменитый Лейбниц, книги которого пользовались большим спросом среди ученых.

В дальнейшем важную роль будет играть следующая Лемма:

Лемма. Пусть в множестве $A$ $m$ элементов, а в множестве $B$ — $n$ элементов. Тогда число всех различных пар $(a;b)$, где $a \in A$, $b \in B$ будет равно $mn$.

Доказательство. Действительно, с одним элементом из множества $A$ мы можем составить $n$ таких различных пар, а всего в множестве $A$ $m$ элементов.

Размещения, перестановки, сочетания

Пусть у нас есть множество из трех элементов $\{a;b;c\}$. Какими способами мы можем выбрать из этих элементов два? $ab, ac, bc, ba, ca, cb$.

Определение. Размещениями множества из $n$ различных элементов по $m$ элементов $(m \leq n)$ называются комбинации, которые составлены из данных $n$ элементов по $m$ элементов и отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Число всех размещений множества из $n$ элементов по $m$ элементов обозначается через $A_n^m$ (от начальной буквы французского слова “arrangement”, что означает размещение), где $n = 1, 2, \dots$ и $m = \overline{1, n}$.

Теорема. Число размещений множества из $n$ элементов по $m$ элементов равно $A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1)$

Доказательство. Пусть у нас есть элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$. Пусть $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}$ — возможные размещения. Будем строить эти размещения последовательно. Сначала определим $a_{i1}$ — первый элемент размещения. Из данной совокупности $n$ элементов его можно выбрать $n$ различными способами. После выбора первого элемента $a_{i1}$ для второго элемента $a_{i2}$ остается $n-1$ способов выбора и т.д. Так как каждый такой выбор дает новое размещение, то все эти выборы можно свободно комбинировать между собой. Поэтому имеем: $A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1)$

Пример. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти цветов?

Решение. Искомое число трехполосных флагов:

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Определение. Перестановкой множества из $n$ элементов называется расположение элементов в определенном порядке.

Так, все различные перестановки множества из трех элементов $\{a;b;c\}$ — это $abc, acb, bac, bca, cab, cba.$

Очевидно, перестановки можно считать частным случаем размещений при $m = n$.

Число всех перестановок из $n$ элементов обозначается $P_n$ (от начальной буквы французского слова "permutation", что значит "перестановка", "перемещение"). Следовательно, число всех различных перестановок вычисляется по формуле

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Пример. Сколькими способами можно расставить 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Искомое число расстановки 8 ладей

$P_8 = 8! = 40320.$

| $n$ | $n!$ | $n$ | $n!$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 6 | 720 |
| 1 | 1 | 7 | 5040 |
| 2 | 2 | 8 | 40320 |
| 3 | 6 | 9 | 362880 |
| 4 | 24 | 10 | 3628800 |
| 5 | 120 | | |

$0! = 1$ по определению!

Определение. Сочетаниями из $n$ различных элементов по $k$ элементов называются комбинации, которые составлены из данных $n$ элементов по $k$ элементов и отличаются хотя бы одним элементом (иначе говоря, $k$-элементные подмножества данного множества из $n$ элементов).

Как видим, в сочетаниях в отличие от размещений не учитывается порядок элементов. Число всех сочетаний из $n$ элементов по $k$ элементов в каждом обозначается $C_n^k$ (от начальной буквы французского слова "combinasion", что значит "сочетание").

Числа $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

$C_5^2 = 10$

Все сочетания из множества $\{a, b, c, d, e\}$ по два — $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de$.

$C_n^0 = 1, C_n^n = 1, C_n^1 = n$.

Свойства чисел $C_n^k$

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Действительно, каждому $k$-элементному подмножеству данного $n$ элементного множества соответствует одно и только одно $n-k$-элементное подмножество того же множества.

2. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Действительно, мы можем выбирать подмножества из $k$ элементов следующим образом: фиксируем один элемент; число $k$-элементных подмножеств, содержащих этот элемент, равно $C_{n-1}^{k-1}$; число $k$-элементных подмножеств, не содержащих этот элемент, равно $C_{n-1}^k$.

Треугольник Паскаля

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
\ldots & & & & & & & &
\end{array}
$$

В этом треугольнике крайние числа в каждой строке равны 1, а каждое не крайнее число равно сумме двух чисел предыдущей строки, стоящих над ним. Таким образом, этот треугольник позволяет вычислять числа $C_n^k$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&& \\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&& \\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&& \\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&& \\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1& \\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1
\end{array}
$$

...

$C_7^3 = 35; C_8^6 = 28$.

Теорема. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (0 \le k \le n)$

Доказательство. Рассмотрим множество из $n$ элементов и решим двумя способами следующую задачу: сколько можно составить последовательностей из $k$ элементов данного множества, в каждой из которых никакой элемент не встречается дважды?

1 способ. Выбираем первый член последовательности, затем второй, третий и т.д. член

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

2 способ. Выберем сначала $k$ элементов из данного множества, а затем расположим их в некотором порядке

$$C_n^k \cdot k!,$$

$$C_n^k \cdot k! = n(n-1)\dots(n-k+1),$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Домножим числитель и знаменатель этой дроби на $(n-k)!$:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$C_{20}^8 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 323 \cdot 390 = 125970.$$

Пример. Сколькими способами можно в игре “Спортлото” выбрать 5 номеров из 36?

Искомое число способов $C_{36}^{5} = \frac{36!}{5!31!} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 376992.$

Соответственно, на числа сочетаний переносятся все уже известные свойства биномиальных коэффициентов, в частности, свойство

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Это свойство можно доказать новым способом, исходя из комбинаторного смысла чисел $C_n^m$. Сумма $(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n)$ – это совокупное число, которым можно выбрать последовательно из *n* имеющихся элементов: ноль элементов (это можно сделать только одним способом), один элемент (это, разумеется, можно сделать *n* способами), два элемента и т. д., наконец, *n* элементов (снова одним способом). Каково же это суммарное число? Обратимся к способу решения вышеприведенной задачи об ожерельях! В данном сочетании первый элемент либо присутствует, либо нет – две возможности. Независимо от первого, второй либо присутствует, либо нет – значит, для присутствия или отсутствия первого и второго четыре возможности. Независимо от первого и второго, третий может присутствовать, может не присутствовать – итого 8 возможностей и т. д. Всего получается $2^n$ всевозможных сочетаний, где каждый элемент может присутствовать, а может и отсутствовать, вплоть до одновременного отсутствия всех *n* элементов (единственный возможный вариант сочетания из *n* по 0): правда, индийская задача как раз этот – единственный – случай и исключала: ожерелье вовсе без камней – вообще не ожерелье.