Тема: Случайные величины. Дискретные случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины . Числовые характеристики дискретных случайных величин.

1. *Понятие о случайных величинах*
2. *Дискретные случайные величины, способы задания ДСВ.*
3. *Закон распределения дискретной случайной величины.*
4. *Числовые характеристики дискретных случайных величин*

Понятие о случайных величинах

Основной задачей теории вероятностей является не столько изучение экспериментов со случайными исходами, а связанных с ними числовых величин. Такие величины называются случайными величинами. Использование аппарата случайных величин оказывается удобным, поскольку он позволяет заменить исходное множество событий на числовую прямую. В результате вероятностная модель абстрагируется от «несущественных» деталей и может быть использована для описания самых разных случайных явлений. По сути все свойства и характеристики этих явлений оказываются записаны в одну функцию — функцию распределения случайной величины. В этом разделе изучаются распределения случайных величин, их числовые характеристики и свойства, а также предельные

Определение. Под случайной величиной понимается переменная, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно из возможного множества своих значений (какое именно – заранее не известно). Примеры. 1) число мальчиков среди 100 новорожденных – случайная величина, которая принимает следующие возможные значения: 0, 1, 2…100; 2) количество бракованных изделий в партии, где всего n изделий – случайная величина, которая принимает следующие возможные значения: 0, 1, 2…n; 3) расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия – случайная величина, значения которой принадлежат некоторому промежутку; 4) число проведенных выстрелов до первого попадания в цель – случайная величина, которая принимает следующие возможные значения: 1, 2, 3,… В первом, втором и четвертом примере случайная величина принимает значения, которые отделены друг от друга промежутками, в которых нет возможных значений данной случайной величины. В третьем примере случайная величина может принять любое значение из некоторого промежутка, причем одно значение от другого нельзя отделить промежутком, не содержащим возможных значений данной случайной величины. Поэтому целесообразно различать случайные величины, принимающие лишь изолированные значения, и случайные величины, возможные значения которых сплошь заполняют некоторый промежуток.

Определение. Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные значения.

Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным, но счетным (их можно перенумеровать натуральными числами.) Так, в примерах 1 и 2 случайная величина имеет конечное множество значений, а в примере 4 – бесконечное, но счетное множество значений.

Определение. Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого промежутка (конечного или бесконечного). Число возможных значений непрерывной случайной величины – бесконечно и несчетно.

Случайные величины принято обозначать заглавными буквами – X, Y, Z, а их возможные значения – соответствующими строчными буквами, например, если величина X имеет три возможных значения, то их обозначают: $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$. Понятие случайной величины играет весьма важную роль в теории вероятностей. Если «классическая» теория вероятностей оперирует по преимуществу с событиями, то современная теория вероятностей предпочитает, где только возможно, оперировать со случайными величинами.

Приведем пример типичного для теории вероятностей приема перехода от событий к случайным величинам. Производится опыт, в результате которого может появиться или не появиться некоторое событие А. Вместо события А можно рассмотреть случайную величину X, которая принимает значение 1, если событие А происходит, и принимает значение 0, если событие А не происходит. Эта случайная величина называется характеристической случайной величиной события А (индикатором события А). Мы подробно остановимся на рассмотрении дискретной случайной величины (ДСВ). На первый взгляд может показаться, что для задания дискретной случайной величины достаточно перечислить все ее возможные значения. Однако случайные величины могут принимать одинаковые значения, но вероятности этих возможных значений – различные. Поэтому для задания ДСВ помимо возможных значений надо указать их вероятности. Определение. Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями. Про случайную величину говорят, что она «распределена по данному закону» или «подчинена данному закону». Закон распределения можно задать: таблично, аналитически (в виде формулы), графически.

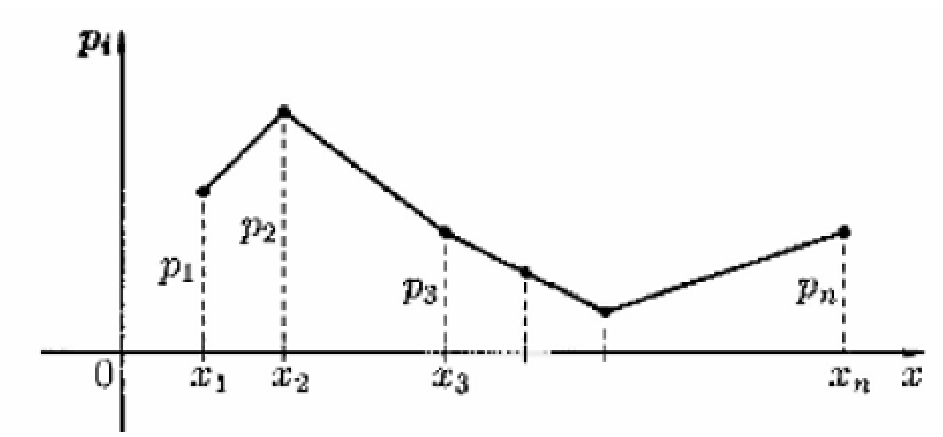
Табличный способ задания ДСВ

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Приняв во внимание, что в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно значение, заключаем, что события $X = x_1$, $X = x_2$, $X = x_3$,..., $X = x_n$ образуют полную группу событий. Следовательно, $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$

Графический способ задания ДСВ.

Для наглядности закон распределения ДСВ можно изобразить графически. Для этого в прямоугольной системе координат строят точки $(x_i; p_i)$ где, $i = 1, 2, ..., n$, а затем соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют многоугольником (полигоном) распределения вероятностей.



Аналитический способ задания ДСВ

Задаются возможные значения случайной величины, и указывается формула, по которой вычисляются их вероятности.

Пример. Экзаменатор задал студенту 4 дополнительных вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный вопрос 0,9.

Составить закон распределения случайной величины X – числа ответов на заданные вопросы.

Решение.

Используем формулу Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Здесь n=4, p=0,9, q=0,1.

$P(X=0) = q^4 = 0{,}1^4$,

$P(X=1) = C_4^1 p^1 q^3 = 4 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^3$,

$P(X=2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^2$,

$P(X=3) = C_4^3 p^3 q = 4 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1$,

$P(X=4) = p^4 = 0{,}9^4$.

X	0	1	2	3	4
P	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

Функция распределения вероятностей случайной величины

Функцию распределения вводят с целью дать общий способ задания любых типов случайных величин (т.к. для непрерывной случайной величины нельзя перечислить все бесконечное несчетное множество ее значений).

Пусть x – действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение меньше x, т.е. $P(X < x)$ обозначим через $F(x)$.

Если x меняется, то меняется и $F(x)$, т.е. $F(x)$ – функция от x.

Определение. Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение меньше x, т.е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения

1. Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, значения которой заключены между нулем и единицей:

$0 \le F(x) \le 1$.

2. Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция на всей числовой оси.

Если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Следствие. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_1, x_2)$ равна приращению ее функции распределения на этом интервале.

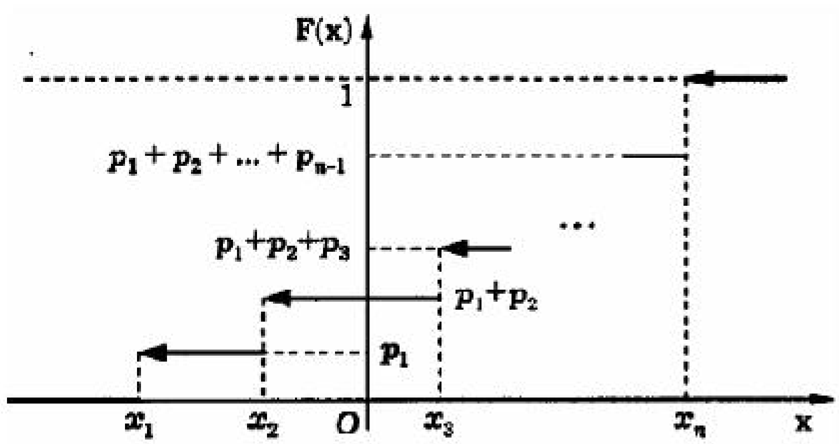
$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

3. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a,b), то $F(x)=0$, при $x \le a$, $F(x)=1$, при $x \ge b$.

Следствие. Если $-\infty<X<+\infty$, то $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

Функция распределения всегда есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой расположены в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений.

$$F(x)=P\{X<x\}=\begin{cases} 0 & , x \le x_1 \\ p_1 & , x_1 < x \le x_2 \\ p_1+p_2 & , x_2 < x \le x_3 \\ p_1+p_2+\ldots+p_k & , x_k < x \le x_{k+1} \\ \ldots & \\ 1 & , x > x_n \end{cases}$$



Пример. Дан ряд распределения случайной величины:

x_i	1	4	5	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Найти и изобразить график ее функции распределения.

Решение: Будем задавать различные значения x_i; и находить для них F(x):

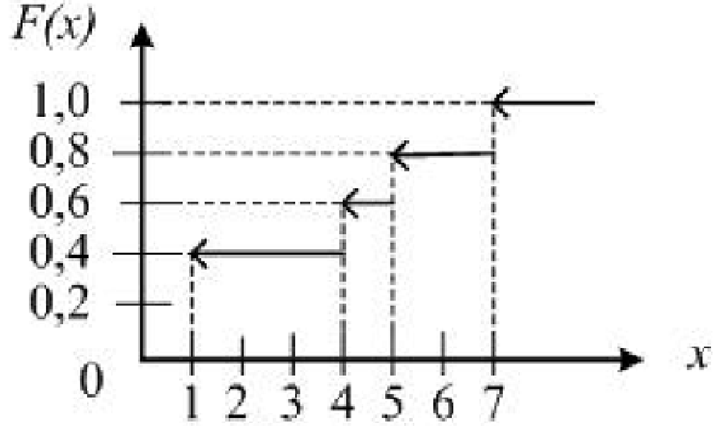
1. Если $x \le 1$, F(x)=0.
2. Пусть $1< x \le 4$, (например $x = 2$), F(x) = P(x=1) = 0,4.
3. Пусть $4< x \le 5$, (например $x = 4{,}25$),

$F(x) = P(X < x) = P(x = 1) + P(x = 4) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5.$

4. Пусть $5<x\leq 7$,

$F(x) = (P(x = 1) + P(x = 4) + P(x = 5) = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8.$

5. Пусть $x>7$, $F(x) = (P(x = 1) + P(x = 4) + P(x = 5) + P(x = 7))=0{,}8 + 0{,}2 = 1.$



Функция распределения СВ

Числовые характеристики дискретной случайной величины

Закон распределения случайной величины дает исчерпывающую информацию о ней, т.к. позволяет вычислить вероятности любых событий, связанных со случайной величиной. Однако во многих вопросах практики нет необходимости характеризовать случайную величину полностью. Зачастую достаточно бывает указать только отдельные числовые параметры, до некоторой степени, характеризующие существенные черты распределения случайной величины. Например, какое-то среднее значение, около которого группируются возможные значения случайной величины; какое-либо число, характеризующее степень разбросанности этих значений относительно среднего, и т.д. Пользуясь такими характеристиками, существенные сведения относительно случайной величины можно выразить наиболее компактно. Такие характеристики называются *числовыми* характеристиками случайной величины. С помощью числовых характеристик существенно облегчается решение многих задач, причем задачу можно решить, оставляя в стороне закон распределения случайной величины.

Математическое ожидание

Происхождение термина «математическое ожидание» связано с начальным периодом развития ТВ, когда ее область применения ограничивалась азартными играми. Игрока интересовало среднее значение ожидаемого выигрыша, т.е. математическое ожидание выигрыша.

Определение. *Математическим ожиданием дискретной* случайной величины Х называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \ .$$

Причем $M(X)$ – величина не случайная, $M(X)$ – const.

Если дискретная случайная величина принимает бесконечное, но счетное множество значений, то математическим ожиданием называется сумма ряда (если он сходится):

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i \ .$$

В случае, если ряд расходится, то случайная величина не имеет математического ожидания.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:

$$M(C)=C.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX)=CM(X).$$

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y).$$

Замечание. Данное свойство справедливо для конечного числа :езависимых случайных величин.

4. Математическое ожидание алгебраической суммы двух случайных величин равно такой же сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X\pm Y)=M(X)\pm M(Y).$$

Замечание. Данное свойство справедливо для конечного числа лучайных величин.

5. Если все значения случайной величины увеличить (уменьшить) на постоянную С, то на эту же постоянную С увеличится (уменьшится) математическое ожидание:

$$M(X\pm C)=M(X)\pm C.$$

Однако математическое ожидание не может полностью характеризовать случайный процесс. Кроме математического ожидания надо ввести величину, которая характеризует отклонение значений случайной величины от математического ожидания. Это отклонение равно разности между случайной величиной и ее математическим ожиданием. При этом математическое ожидание отклонения равно нулю. Это объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, другие отрицательны, и в результате их взаимного погашения получается ноль. Характеристиками рассеивания возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания служат, в частности, дисперсия и среднеквадратичное отклонение.

Дисперсия дискретной случайной величины

Определение. *Дисперсией* D(X) случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания.

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Если X – дискретная случайная величина с конечным множеством значений, то:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i.$$

Если дискретная случайная величина имеет бесконечное, но счетное множество значений, то:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i.$$

Дисперсия существует, если данный ряд сходится.

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, что не всегда удобно. Поэтому в качестве показателя рассеяния используют величину $\sqrt{D(X)}$.

Определение. *Средним квадратическим отклонением* (стандартным отклонением) σ_X случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)}$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его при этом в квадрат:

$$D(k \cdot X) = k^2 \cdot D(X).$$

3. Дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2.$$

Это свойство часто используют при вычислении дисперсии, оно упрощает расчеты по сравнению с вычислением по определению, если математическое ожидание, а значит и разности $x_i - a$ – нецелые числа.

4. Дисперсия алгебраической суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

Пример. Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Вероятности отказа каждого из приборов равны соответственно $p_1=0,3$; $p_2=0,4$; $p_3=0,5$; $p_4=0,6$. Найти математическое ожидание и дисперсию числа отказавших приборов.

Решение.

Принимая за случайную величину число отказавших приборов, видим, что эта случайная величина может принимать значения 0, 1, 2, 3 или 4.

Для составления закона распределения этой случайной величины необходимо определить соответствующие вероятности. Примем $q_i = 1 - p_i$.

1) Не отказал ни один прибор: $p(0) = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,084.$

2) Отказал один из приборов:

$$p(1) = p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4 = 0,302.$$

3) Отказали два прибора.

$$p(2) = p_1 p_2 q_3 q_4 + p_1 q_2 p_3 q_4 + p_1 q_2 q_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 p_4 + q_1 q_2 p_3 p_4 = 0,38.$$

4) Отказали три прибора.

$$p(3) = p_1 p_2 p_3 q_4 + p_1 p_2 q_3 p_4 + p_1 q_2 p_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 p_4 = 0,198.$$

5) Отказали все приборы.

$$p(4) = p_1 p_2 p_3 p_4 = 0,036.$$

Получаем закон распределения:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
p	0,084	0,302	0,38	0,198	0,036

Математическое ожидание:

$M(X) = 0,302 + 2 \cdot 0,38 + 3 \cdot 0,198 + 4 \cdot 0,036 = 1,8$ (приборов)

$M(X^2) = 0,302 + 2^2 \cdot 0,38 + 3^2 \cdot 0,198 + 4^2 \cdot 0,036 =$

$= 0,302 + 4 \cdot 0,38 + 9 \cdot 0,198 + 16 \cdot 0,036 = 4,18$

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение:

$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2 = 4,18 - 3,24 = 0,94$ (приборов),

$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = 0,97.$