Глава 1. Понятие о характеристиках уравнений в частных производных. Классификация уравнений в частных производных.

1.1. Классификация уравнений в частных производных.

Обозначим через Ω область $n-$мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ точек x с декартовыми ортогональными координатами $x_1,\ldots,x_n, n\geqslant 2$.

Пусть $F(x,\ldots,P_{\alpha_1\ldots\alpha_n},\ldots)$ – заданная действительная функция точек x области Ω и действительных переменных $P_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ с неотрицательными целочисленными индексами $\alpha_1,\ldots,\alpha_n, \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j = k, k=0,\ldots,m, m\geqslant 1,$ по крайней мере одна из производных которой

$$\frac{\partial F}{\partial P_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}, \quad \sum_{j=1}^{n}\alpha_j = m$$

отлична от нуля.

Равенство вида

$$F\left(x,\ldots,\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},\ldots\right)=0 \qquad (1.1.1)$$

называется дифференциальным уравнением с частными производными порядка m относительно неизвестной функции $u(x)=u(x_1,\ldots,x_n), x\in\Omega$, а левая часть этого равенства – дифференциальным оператором с частными производными порядка m.

Определенная в области Ω задания уравнения (1.1.1) действительная функция $u(x)$, непрерывная вместе со своими частными производными, входящими в это уравнение и обращающая его в тождество, называется регулярным решением.

Говорят, что уравнение (1.1.1) линейно, если F является линейной функцией относительно всех переменных $P_{\alpha_1\ldots\alpha_n}, |\alpha| = \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j = k, k=0,\ldots,m$. Когда функция F линейна лишь относительно переменных $P_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ при $\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j = m$, то уравнение (1.1.1) называется квазилинейным.

Линейное уравнение $Lu = f(x)$ называется однородным или неоднородным в зависимости от того будет ли его правая часть $f(x)$ равна нулю для всех $x\in\Omega$ или отлична от тождественного нуля.

Очевидно, что если функции $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями неоднородного линейного уравнения $Lu = f$, то их разность $w = u(x) - v(x)$ будет решением однородного уравнения $Lw = 0$. Кроме того, если $u_k(x), k = 1,\ldots,l$, – решения однородного уравнения, то решением этого уравнения является и функция $u = \sum_{k=1}^{l} c_k u_k(x)$, где c_k – действительные постоянные.

Тип уравнения (1.1.1) определяется с

$$K(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial P_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}$$

характеристической формой.

Пусть

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \tag{1.1.2}$$

общий вид линейного уравнения порядка m где $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ – мультииндекс, $\alpha_j \geqslant 0,\ j = \overline{1,n}$ причем α_j – целые. $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ модуль мультииндекса. $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Заменяя $D^\alpha \to \xi^\alpha$ получим символ уравнения (1.1.2):

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \text{ где } \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1},\ldots,\xi_n^{\alpha_n}.$$

Главным символом или характеристическим многочленом уравнения (1.1.2) является $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$.

Фиксируем точку $x \in \Omega$. Характеристическим направлением называется ненулевой вектор $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \ne 0$ который $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha = 0$.

Гиперповерхностью называется характеристическая поверхность, заданная формулами $F(x_1,\ldots,x_n) = 0$, в которой каждая точка имеет характеристическое направление, т.е.

$$\begin{cases} F(x_1,\ldots,x_n) = 0, \\ \sum_{|\alpha\le m|} a_\alpha(x) \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdot\ldots \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}, \ \ gradF \ne 0. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Это уравнение характеристика, где

$$gradF = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\right).$$

Рассмотрим квазилинейное (линейное относительно всех старших производных) дифференциальное уравнение второго порядка

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x,u,grad\,u) = 0 \qquad (1.1.3)$$

с непрерывными коэффициентами $a_{ij}(x)$.

Функция $F(x),\ \ x=(x_1,\dots,x_n), n\geqslant 2$, класса C^1 такова, что на поверхности

$$F(x)=0, \qquad grad\,F \neq 0 \quad \text{и}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0. \qquad (1.1.5)$$

Тогда $F(x)=0$ называется характеристической поверхностью квазилинейного дифференциального уравнения (1.1.4), а уравнение (1.1.5) – характеристическим уравнением. При $n=2$ характеристическая поверхность называется характеристической линией.

Для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 - a^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 = 0 \quad \text{на} \quad F=0$$

Поверхность

$$a^2(t-t_0)^2 - |\,x-x_0\,|^2 = 0$$

называется характеристическим конусом с вершиной в точке (x_0,t_0), является характеристической поверхностью.

Для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f,$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$-a^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 = 0 \quad \text{на} \quad F=0.$$

Его характеристиками, очевидно, является семейство плоскостей $t=c$.

Для уравнения Пуассона $\Delta u = f$, характеристическое уравнение имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 = 0 \quad \text{на} \quad F=0$$

Отсюда вытекает, что $gradF=0$ на $F=0$, что невозможно, т.е. характеристической поверхности не имеет.

Определение 1.1.1. *Линейное уравнение*

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha u = f(x)$$

называется эллиптическим в точке x^0, *если*

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x^0)\xi^\alpha \neq 0 \quad \text{при любом} \quad |\xi|\neq 0.$$

(Другими словами, у него нет действительной характеристики).

Определение 1.1.2. *Уравнение*

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha u = f(x)$$

в точке x^0 *называется гиперболическим в направлении оси* x_n, *если уравнение*

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x^0)\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n} = 0$$

относительно ξ_n *при любых* $\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}$ *таких, что* $\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j^2 \neq 0$, *имеет* m *действительных и различных корней.*

Определение 1.1.3. *Если для фиксированной точки* x^0 *можно найти такое аффинное преобразование переменных*

$$\xi_i = \xi_i(\mu_1,\ldots,\mu_n), \quad i = 1,\ldots,n,$$

в результате которого полученная из $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x^0)\xi^\alpha$ *форма содержит лишь* l, $0<l<n$, *переменных* μ_i, *то говорят что уравнение* $\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha u = f(x)$ *в точке* x^0 *параболический вырождается.*

Линейные уравнения в частных производных второго порядка можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + f = 0$$

$(a_{ij} = a_{ji})$, где a,b,c,f являются функциями $x = (x_1,\ldots,x_n)$. Введем новые независимые переменные ξ_k, полагая

$$\xi_k = \xi_k(x_1,\ldots,x_n) \quad k = \overline{1,n}.$$

Тогда

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}\alpha_{ik},$$

$$u_{x_ix_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_{\xi_k\xi_l}\alpha_{ik}\alpha_{jl} + \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}\left(\xi_k\right)_{x_ix_j}, \text{ где } \alpha_{ik} = \frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}.$$

Подставляя выражения для производных в исходное уравнение, получим:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \bar{a}_{kl}u_{\xi_k\xi_l} + \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k u_{\xi_k} + cu + f = 0,$$

где

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jl}, \; \bar{b}_k = \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_{ik} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_k) x_i x_j .$$

Рассмотрим квадратическую форму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x^0) y_i y_j .$$

Произведя над переменным y линейные преобразование

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\eta_k$$

получим

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \bar{a}_{kl}(x^0)\eta_k\eta_l$$

где

$$\bar{a}_{kl}(x^0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\alpha_{ik}\alpha_{jl} .$$

Как известно, выбором соответствующего линейного преобразования можно привести матрицу $a_{ij}(x^0)$ квадратической формы к диагональному виду, т.е. к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \eta_i^2, \quad \text{где} \quad \alpha_i, \; i = \overline{1,n}$$

принимают значения $1, -1, 0,$ причем согласно закону инерции, число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы инвариантно относительно линейного преобразования.

Назовем уравнение в точке x^0 уравнением эллиптического типа, если все n коэффициентов α_i одного знака; гиперболического типа (или нормального гиперболического типа), если $n-1$ коэффициентов α_i имеют одинаковый знак, а один коэффициент противоположен им по знаку; ультрагиперболического типа, если среди α_i имеется m коэффициентов одного знака и $n-m$ противоположного знака $(m > 1, n-m > 1)$; параболического типа, если хотя бы один из коэффициентов α_i равен нулю.

1.2. Канонические формы

Канонические формы:

$$\Delta u + \Phi = 0 \text{ (эллиптический тип)},$$

$$u_{x_1 x_1} = \sum_{i=2}^{n} u_{x_i x_i} + \Phi \text{ (гиперболический тип)},$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_{x_i x_i} = \sum_{i=m+1}^{m} u_{x_i x_i} + \Phi \;\; (m>1,\; n-m>1), \text{ (ультрагиперболический тип)},$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} \pm u_{x_i x_i} + \Phi = 0 \;\; (m>0), \;\; \text{(параболический тип)}.$$

В случае с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} + cu + f = 0$$

при помощи линейного преобразования переменных приводится к каноническому виду одновременно для всех точек области его определения. Вводя вместо u новую функцию v

$u = ve^{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n}$

и выбирая нужным способом λ_i, мы можем дальше упростить уравнение, что приводит нас к каноническим формам.

При $n = 2$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + cv + f_1 = 0, \text{ (эллиптический тип)},$$

$$v_{\xi\eta} + cv + f_1 = 0, \text{ или } v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + cv + f_1 = 0 \text{ (гиперболический тип)},$$

$$v_{\xi\xi} + b_2 v + f_1 = 0, \text{ (параболический тип)}.$$

Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0, \text{ где } \quad A, B, C \in C^2(\Omega). \qquad (1.2.1)$$

Дифференциальное уравнение принадлежит

1. гиперболическому типу, если $B^2 - AC > 0$
2. параболическому типу, если $B^2 - AC = 0$
3. эллиптическому типу, если $B^2 - AC < 0$

Пусть

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

–дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем Якобиан

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{в области } \Omega.$$

В новых переменных ξ и η уравнение запишется так:

$$\bar{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{B}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0 \qquad (1.1.2)$$

где

$$\bar{A}(\xi,\eta)=A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$\bar{C}(\xi,\eta)=A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2,$$

$$\bar{B}(\xi,\eta)=A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+2B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)+C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y},$$

$$\bar{B}^2-\bar{A}\bar{C}=\left(B^2-AC\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2.$$

Покажем, что функции $\xi(x,)$ и $\eta(x,y)$ можно выбирать так, чтобы выполнялось только одно из условий

1. $\bar{A}=0,\bar{C}=0;$
2. $\bar{A}=0,\bar{B}=0;$
3. $\bar{A}=\bar{C},\bar{B}=0.$

$B^2-AC>0.$

Будем предполагать $A\neq 0$ либо $C\neq 0.$ Допустим $A\neq 0$

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0. \qquad (1.2.3)$$

Уравнение можно записать в виде

$$\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(B+\sqrt{B^2-AC}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\times\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(B-\sqrt{B^2-AC}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]=0.$$

Отсюда

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(B+\sqrt{B^2-AC}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0, \qquad (1.2.4)$$

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(B-\sqrt{B^2-AC}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0. \qquad (1.2.5)$$

Для интегрирования (1.2.4) и (1.2.5) составим соответствующие обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B+\sqrt{B^2-AC}},\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B-\sqrt{B^2-AC}}$$

или

$$Ady-\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)dx=0,$$

$$Ady-\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)dx=0,$$

или в виде одного уравнения

$$A(dy)^2-2Bdxdy+C(dx)^2=0$$

Отсюда, так как $A(x_0, y_0) \neq 0,$ то существуют интегралы

$$\varphi_1(x,y) = const, \quad \varphi_2(x,y) = const$$

(На самом деле, в случае с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \ \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A},$$

$$y = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} x + C_1, \ y = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} x + C_1).$$

Положим $\xi = \varphi_1(x,y), \quad \eta = \varphi_2(x,y).$ Разделив на $2\overline{B}$ уравнение (1.2.2) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F_1(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta})$$

или положив $\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha, \frac{\partial u}{\partial \beta}} \right).$$

Это–канонический вид уравнения гиперболического типа. Будем предполагать $A \neq 0$. Тогда уравнения (1.2.3) имеет вид: $A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$.

Находя общие решения $\varphi(x,y) = const,$ положим $\xi = \varphi(x,y)$ за $\eta = \eta(x,y)$ возьмем любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию так, чтобы $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0,$ в окрестности точки (x_0, y_0).

Из условия $B^2 - AC = 0$ и

$$A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

следует, что

$$B\frac{\partial \varphi}{\partial x} + C\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Поэтому

$$\overline{B} = \left(A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(B\frac{\partial \varphi}{\partial x} + C\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Так как $\overline{A} = 0.$ Коэффициент $\overline{C}$ преобразуется к виду

$$\overline{C} = \frac{1}{A}\left(A\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2, \quad \text{откуда} \ \overline{C} \neq 0.$$

Разделив на $\overline{C} \neq 0$ уравнение (1.2.2) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

Это–канонический вид уравнения параболического типа. Будим считать, это коэффициенты A, B, C суть аналитические функции от x и y. Тогда уравнение

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(B+\sqrt{B^2-AC})\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$$

имеет аналитические решение $\varphi(x,y)=\varphi_1(x,y)+i\varphi_2(x,y)$ в окрестности точки (x_0,y_0) и $|\frac{\partial\varphi}{\partial x}|+|\frac{\partial\varphi}{\partial y}|\neq 0$ в этой окрестности. (Существование такого аналитического решения следует из теоремы Ковалевской).

Положим

$$\xi=\varphi_1(x,y),\quad \eta=\varphi_2(x,y).$$

Нетрудно показать, что $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y)}\neq 0.$ Разделяя теперь в тождестве

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0$$

вещественную и мнимую части, получим

$$A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2,$$

т.е. $\overline{A}=\overline{C}$ и

$$A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}=0$$

т.е. $\overline{B}=0.$ В силу определенности квадратичной формы

$$At_1^2+2Bt_1t_2+Ct_2^2\quad (B^2-AC<0)$$

$\overline{A}=\overline{C}$ могут обратиться в нуль только в том случае, если

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y}=0.$$

Но мы выбирали решение $\varphi(x,y)$ таким чтобы не выполнялись одновременно. Таким образом, после деления на $\overline{a}$, получим

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=F_3\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right).$$

Это – канонический вид уравнения эллиптического типа.