Глава 3. Корректность постановок задач математической физики.

3.1. Основные понятия

Поскольку задачи математической физики представляют собой математические модели реальных физических процессов, то их постановки должны удовлетворять следующим естественным требованиям:

а) Решение должно существовать в каком-то классе функций M_1.

b) Решение должно быть единственным в некотором классе функций M_2.

c) Решение должно непрерывно зависеть от данных задачи (начальных и граничных данных, свободного члена, коэффициентов уравнения и т.д.). Непрерывная зависимость решения u от данного задачи $\tilde{u}$ означает следующее:

пусть последовательность данных $\tilde{u}_k, k=1,2,\dots$ в каком-то смысле стремится к $\tilde{u}$ и $u_k, k=1,2,\dots,u$ – соответствующие решения задачи: тогда должно быть $u_k \to u,\ k\to\infty$, в смысле сходимости, выбранной надлежащим образом. Например, пусть задача приводится к уравнению $Lu = f$, где L – линейный оператор, переводящий M в N, где M и N – линейные нормированные пространства. В этом случае непрерывная зависимость решения u от свободного члена f будет обеспечена, если оператор L^{-1} существует и ограничен из N в M. Требование непрерывной зависимости решения обусловливается тем обстоятельством, что физические данные, как правило, определяются из эксперимента приближенно, и поэтому нужно быть уверенным в том, что решение задачи в рамках выбранной математической модели не будет существенно зависеть от погрешностей измерений.

Задача, удовлетворяющая перечисленным требованиям, называется корректно поставленной (по Адамару), а множество функций $M_1 \cap M_2$ – классом корректности. Задача, не удовлетворяющая хотя бы одному из условий $a)-c)$ называется некорректно поставленной.

К некорректно поставленным задачам часто приводят обратные задачи математической физики: по некоторой информации о решении прямой задачи восстановить некоторые неизвестные физические величины, определяющие эту задачу (источники, краевые условия, коэффициенты уравнения и т.д.).

Новый подход к некорректно поставленным задачам предложен А.Н. Тихоновым.

Различают корректно поставленные и некорректно поставленные задачи. Понятие некорректной постановки задачи математической физики было введено Ж. Адамаром в связи с желанием выяснить, какие типы граничных условий наиболее естественны для различных типов дифференциальных уравнений (для эллиптических, например, – задача Дирихле и ей аналогичные, для гиперболических – задача Коши).

Пусть $Lu = f$ – уравнение и $Bu = \psi$ – дополнительное условие.

Решения всякой количественной задачи обычно заключается в нахождении "решения" и по заданным "исходным данным" $(f, \psi) = F \in \mathbb{F}, u = R(F).$ Мы будем считать их элементами метрических пространств U и $\mathbb{F}$ с расстояниями между элементами $\rho_V(u_1, u_2), \rho_{\mathbb{F}}(F_1, F_2); u_1, u_2 \in V; F_1, F_2 \in \mathbb{F}.$ Метрика обычно определяется постановкой задачи.

Пусть определено понятие "решения" и каждому элементу $F \in \mathbb{F}$ отвечает единственное решение $u = R(F)$ из пространства V.

Задача определения решения $u = R(F)$ из пространства V по исходным данным $F \in \mathbb{F}$ называется устойчивой на пространствах $(V, \mathbb{F})$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\rho_{\mathbb{F}}(F_1, F_2) < \delta(\varepsilon)$ следует $\rho_V(u_1, u_2) < \varepsilon,$ где $u_1 = R(F_1), u_2 - R(F_2); F_1, F_2 \in \mathbb{F}; u_1, u_2 \in V.$

Задача определения решения из пространства V по "исходным данным"F из пространства $\mathbb{F}$ называется корректно поставленной на паре метрических пространств $(V, \mathbb{F})$, если удовлетворяются требования (условия):

1) для всякого элемента $F \in \mathbb{F}$ существует решение u из пространства V;
2) решение определяется однозначно;
3) задача устойчива на пространствах $(V, \mathbb{F}).$

Задачи, не удовлетворяющие перечисленным требованиям, называются некорректно поставленными.

Следует отметить, что определение некорректно поставленных задач относится к данной паре метрических пространств $(V, \mathbb{F}),$ так как в других метриках та же задача может быть корректно поставленной.

3.2. Пример Адамара

Теорема Коши-Ковалевской, несмотря на ее общий характер, полностью не решает вопроса о корректности постановки задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. Действительно, эта теорема гарантирует существование и единственность решения лишь в достаточно малой окрестности, или как говорят, в малом; обычно же эти факты требуется установить в наперед заданных (и отнюдь немалых) областях, или, как говорят, в целом. Далее, начальные данные и свободный член уравнения, как правило, оказываются не аналитическими функциями. Наконец, может вовсе не быть непрерывной зависимости решения от начальных данных. Это показывает пример, впервые построенным Адамаром.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа в двумерном случае. Она состоит в нахождении решения уравнения $\Delta u(x, y) = 0$ по начальным данным, т.е. в нахождении решения, удовлетворяющего условиям

$$u(x,0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – заданные функции.

Если положить $f_1(x) \equiv 0, \varphi_1(x) = \frac{1}{a}\sin ax$, то решением задачи Коши будет функция

$$u_1(x, y) = \frac{1}{a^2}\sin ax \cdot shay, \; a > 0 .$$

Если положить $f_2(x) = \varphi_2(x) \equiv 0$, то решением такой задачи Коши будет функция $u_2(x, y) \equiv 0$.

Если уклонения начальных данных и решений оценивается в метрике C, то имеем

$$\rho_C(f_1, f_2) = \sup_x | f_1(x) - f_2(x) | = 0,$$

$$\rho_C(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_x | \varphi_1(x) - \varphi_2(x) | = \frac{1}{a}.$$

Последняя величина при достаточно больших значениях a может быть сделана сколь угодно малой. Однако уклонение решений

$$\rho_C(u_1, u_2) = \sup_x | u_1(x, y) - u_2(x, y) | = \sup_x \left| \frac{1}{a^2}\sin ax \cdot shay \right| = \frac{1}{a^2} shay$$

при любом фиксированном $y > 0$ может быть произвольно большим при достаточно больших значениях числа a.

Таким образом, эта задача не обладает свойствами устойчивости и, следовательно, является некорректно поставленной.