Глава 4. Метод распространяющихся волн.

4.1. Формула Даламбера

Изучение методов построения краевых задач для уравнений гиперболического типа мы начинаем с задачи с начальными условиями для неограниченной струны:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{4.1.1}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{4.1.2}$$

Преобразуем это уравнение к каноническому виду, содержащему смешанную производную. Уравнение характеристик

$$dx^2 - a^2dt^2 = 0$$

распадается на два уравнения:

$$dx - adt = 0, dx + adt = 0,$$

интегралами которых являются прямые

$$x - at = C_1, x + at = C_2.$$

Вводя, как обычно, новые переменные

$$\xi = x + at, \eta = x - at,$$

уравнение колебаний струны преобразуем к виду:

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{4.1.3}$$

Найдем общий интеграл последнего уравнения. Очевидно, для всякого решения уравнения (4.1.3)

$$u_\eta(\xi,\eta) = f^*(\eta),$$

где $f^*(\eta)$ – некоторая функция только переменного η. Интегрируя это равенство по η при фиксированном ξ, получим:

$$u(\xi,\eta) = \int f^*(\eta)d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \tag{4.1.4}$$

где f_1 и f_2 являются функциями только переменных ξ и η. Обратно, каковы бы ни были дважды дифференцируемые функции f_1 и f_2, функция $u(\xi,\eta)$, определенная формулой (4.1.4), представляет собой решение уравнения (4.1.3). Так как всякое решение уравнения (4.1.3) может быть представлено в виде (4.1.4) является общим интегралом этого уравнения.

Следовательно, функция

$$u(x,t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) \tag{4.1.5}$$

является общим интегралом уравнения (4.1.1).

Допустим, что решение рассматриваемой задачи существует; тогда оно дается формулой (4.1.5). Определим функции f_1 и f_2 таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \tag{4.1.6}$$

$$u_t(x,0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \tag{4.1.7}$$

Интегрируя второе равенство, получим:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)d\alpha + C,$$

где x_0 и C –постоянные. Из равенств

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),\ f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)d\alpha + C$$

находим:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)d\alpha + \frac{C}{2}, \\ f_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)d\alpha - \frac{C}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{4.1.8}$$

Таким образом, мы определили функции f_1 и f_2 через заданные функции φ и ψ, причем равенства (4.1.8) должны иметь место для любого значения аргумента. Подставляя в (4.1.5) найденные значения f_1 и f_2, получим:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left\{\int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha)d\alpha\right\}$$

или

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha. \tag{4.1.9}$$

Формулу (4.1.9), называемую формулой Даламбера, мы получили, предполагая существование решения поставленной задачи. Эта формула доказывает единственность решения. В самом деле, если бы существовало второе решение задачи (4.1.1)-(4.1.2), то оно представлялось бы формулой (4.1.9) и совпадало бы с первым решением.

Нетрудно проверить, что формула (4.1.9) удовлетворяет (в предположении двукратной дифференцируемости функции φ и однократной дифференцируемости функции ψ) уравнению и начальным условиям. Таким образом, изложенный метод доказывает как единственность, так и существование решения поставленной задачи.

4.2. Неоднородное уравнение

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения колебаний

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ \ -\infty < x < +\infty, \ \ t > 0 \tag{4.2.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) u_t(x,0) = \psi(x), \ \ -\infty < x < +\infty. \tag{4.2.2}$$

Пусть $W(x,t;r)$ --- решение вспомогательной задачи Коши

$$W_{tt} = a^2 W_{xx}, \ \ -\infty < x < \infty, \ \ t > r \tag{4.2.3}$$

$$\begin{gathered} W(x,t;r) = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t}(x,t;r) = f(x,r), \ \ t = r, -\infty < x < \infty. \end{gathered} \tag{4.2.4}$$

Формула Даламбера (4.1.9) дает

$$W(x,t;r) = W(x,t-r,0) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a(t-r)}^{x+a(t-r)} f(\xi,r) d\xi. \tag{4.2.5}$$

Докажем, что справедлива следующая лемма:

Решение неоднородного уравнения (4.2.1) с нулевыми начальными данными $u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0$ имеет вид

$$u(x,t) = \int\limits_0^t W(x,t;r) dr. \tag{4.2.6}$$

Дифференцируя функцию (4.2.6) и учитывая условия (4.2.3) для $W(x,t;r),$ находим:

$$u_t(x,t) = W(x,t;t) + \int\limits_0^t \frac{\partial W}{\partial t}(x,t;r) dr = \int\limits_0^t \frac{\partial W}{\partial t}(x,t;r) dr, \tag{4.2.7}$$

$$u_{tt}(x,t) = \frac{\partial W}{\partial t}(x,t;t) + \int\limits_0^t \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}(x,t;r) dr = \int\limits_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t;r) dr + f(x,t), \tag{4.2.8}$$

$$u_{xx} = \int\limits_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t;r) dr. \tag{4.2.9}$$

Отсюда, в силу (4.2.3), получим:

$$u_{tt}(x,t) = \int\limits_0^t \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}(x,t;r) + f(x,t) = \int\limits_0^t a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x,t;r) dr + f(x,t) = a^2 u_{xx} + f(x,t).$$

Решение задачи (4.2.1)-(4.2.2), можно представить в виде

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \int\limits_0^t W(x,t;r) dr. \tag{4.2.10}$$

Пользуясь выражением (4.2.5) для W, получим:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-r)}^{x+a(t-r)} f(\xi,r) d\xi, dr. \tag{4.2.11}$$

Прямая подстановка (4.2.11) в (4.2.1) показывает, что функция (4.2.11) в самом деле является решением задачи (4.2.1)-(4.2.2), если существуют производные $\varphi''(x), \psi'(x)$ и $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Из формулы (4.2.5) следует, что функция W удовлетворяет уравнению при $t = r$, если f дифференцируема по x, т.е. представление (4.2.10) возможно при тех же условиях, при которых решение задачи Коши существует.

4.3. Устойчивость решений

Решение уравнения (4.1.1) однозначно определено начальными условиями (4.1.2). Докажем, что это решение меняется непрерывно при непрерывном изменении начальных условий.

Каков бы ни был промежуток времени $[0, t_0]$ и какова бы ни была степень точности ε, найдется такое $\delta(\varepsilon, t_0)$, что всякие два решения уравнения (4.1.1) $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ в течение промежутка времени t_0 будут различаться между собой меньше чем на ε:

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon (0 \leqslant t \leqslant t_0),$$

если только начальные значения

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,0) &= \varphi_1(x) \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) &= \psi_1(x) \end{aligned}\right\} \text{ и } \left.\begin{aligned} u_2(x,0) &= \varphi_2(x) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) &= \psi_2(x) \end{aligned}\right\}$$

отличаются друг от друга меньше чем на δ:

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta; \qquad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta.$$

Доказательство этой теоремы чрезвычайно просто. Функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ связаны со своими начальными значениями формулой (4.1.9) так что

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \frac{|\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)|}{2} +$$
$$+ \frac{|\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)|}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\alpha) - \psi_2(\alpha)|\, d\alpha,$$

откуда получаем:

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a}\delta \cdot 2at \leqslant \delta(1 + t_0),$$

что и доказывает наше утверждение, если положить

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1 + t_0}.$$

4.4. Полуограниченная прямая и метод продолжений

Рассмотрим задачу о распространении волн на полуограниченной прямой $x \geqslant 0$. Эта задача имеет особенно важное значение при изучении процессов отражения волн от конца и ставится следующим образом:
найти решение уравнения колебаний

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{при} \quad 0 < x < \infty,\ t > 0,$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(0,t) = \mu(t) \quad (\text{или } u_x(0,t) = \nu(t)) \quad (t \geqslant 0)$$

и начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leqslant x < \infty).$$

Рассмотрим сначала случай однородного граничного условия

$$u(0,t) = 0 \ (\text{или } u_x(0,t) = 0),$$

т.е. задачу распространения начального возмущения на струне с закрепленным концом $x = 0$ (или свободным концом).

Отметим следующие две леммы о свойствах решений уравнений колебаний, определенных на бесконечной прямой.

Лемма 4.1.1. *Если начальные данные в задаче о распространении колебаний на неограниченной прямой (задача (4.1.1)-(4.1.2) являются нечетными функциями относительно некоторой точки* x_0*, то соответствующее решение в этой точке* x_0 *равно нулю.*

Лемма 4.1.2. *Если начальные данные в задаче о распространении колебаний на неограниченной прямой (задача (4.1.1)-(4.1.2) является четными функциями относительно некоторой точки* x_0*, то производная по* x *соответствующего решения в этой точке равна нулю.*

Докажем лемму 1. Примем за x_0 за начало координат, $x_0 = 0$. В этом случае условия нечетности начальных данных запишутся в виде

$$\varphi(x) = -\varphi(-x); \psi(x) = -\psi(-x).$$

Функция $u(x,t)$, определяемая формулой (4.1.9), при $x = 0$ и $t > 0$ равна

$$u(0,t) = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\alpha)\, d\alpha = 0,$$

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечетности $\varphi(x)$, а второе равно нулю, поскольку интеграл от нечетной функции в пределах, симметричных относительно начала координат, всегда равен нулю.

Аналогично доказывается лемма 2. Условия четности начальных данных имеют вид

$$\varphi(x) = \varphi(-x); \psi(x) = \psi(-x).$$

Заметим, что производная четной функции является функцией нечетной

$$\varphi'(x) = -\varphi'(-x).$$

Из формулы (4.1.9) следует:

$$u_x(0,t) = \frac{\varphi'(at)+\varphi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a}[\psi(at)-\psi(-at)] = 0, t > 0,$$

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечетности $\varphi'(x)$, а второе – в силу четности $\psi(x)$.

При помощи этих двух лемм можно решить следующие задачи:

требуется найти решение уравнения (4.1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x)\} \quad 0 < x < \infty, \tag{2'}$$

и граничному условию

$$u(0,t) = 0, t > 0$$

(первая краевая задача).

Рассмотрим функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, являющиеся нечетным продолжением $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящих в условие $(2')$:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{для} \quad x > 0, \\ -\varphi(-x) & \text{для} \quad x < 0, \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{для} \quad x > 0, \\ -\psi(-x) & \text{для} \quad x < 0. \end{cases}$$

Функция

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\alpha)d\alpha$$

определена для всех x и $t > 0$. В силу леммы 4.1.1 $u(0,t) = 0$.

Кроме того, эта функция удовлетворяет при $t = 0$ и $x > 0$ следующим начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) = \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \Psi(x) = \psi(x), \end{aligned}\right\} \quad x > 0.$$

Таким образом, рассматривая полученную функцию $u(x,t)$ только для $x \geqslant 0, t \geqslant 0,$ мы получим функцию, удовлетворяющую всем условиям поставленной задачи.

Возвращаясь к прежним функциям, можно написать

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\alpha)d\alpha & \text{для} \quad t < \dfrac{x}{a}, x > 0 \\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\Psi(\alpha)d\alpha & \text{для} \quad t > \dfrac{x}{a}, x > 0 \end{cases} \tag{4.4.1}$$

В области $t < \frac{x}{a}$ влияние граничных условий не сказывается, и выражение для $u(x,t)$ совпадает с решением (4.1.9) для бесконечной прямой.

Аналогично, если при $x = 0$ мы имеем свободный конец

$$u_x(0,t) = 0,$$

то, беря четное продолжение функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$,

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{для} \quad x > 0 \\ \varphi(-x) & \text{для} \quad x < 0, \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{для} \quad x > 0, \\ \psi(-x) & \text{для} \quad x < 0. \end{cases}$$

получим решение уравнения колебаний

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha)d\alpha$$

или

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha)d\alpha & \text{для} \quad t < \dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{0}^{x+at} \Psi(\alpha)d\alpha + \displaystyle\int_{0}^{at-x} \Psi(\alpha)d\alpha & \text{для} \quad t > \dfrac{x}{a} \end{cases}$$

удовлетворяющие в области $x \geqslant 0$ начальным условиям (4.1.2) и граничному условию $u_x(0,t) = 0$.

Итак, мы еще раз сформулируем полученные результаты в виде двух следующих правил.

Для решения задачи на полуограниченной прямой с граничным условием $u(0,t) = 0$ начальные данные надо продолжить на всю прямую нечетно.

Для решения задачи на полуограниченной прямой с граничным условием $u_x(0,t) = 0$ начальные данные надо продолжить на всю прямую четно.

Мы рассмотрели задачи с однородными граничными условиями

$$u(0,t) = \mu(t) = 0$$

или

$$u_x(0,t) = \nu(t) = 0.$$

В общем случае неоднородных граничных условий решение предоставляется в виде суммы, каждое слагаемое которой удовлетворяет только одному из поставленных условий (либо граничному, либо начальному).

Обратимся теперь к решению уравнения при нулевых начальных и заданном граничном условиях

$$\tilde{u}(x,t)=0, \tilde{u}_t(x,0)=0, \tilde{u}(0,t)=\mu(t), t>0$$

Очевидно, что граничный режим вызовет волну, распространяющуюся вдоль струны направо со скоростью a, что подсказывает нам аналитическую форму решения:

$$\tilde{u}(x,t)= f(x-at).$$

Определим функцию f из граничного условия

$$\tilde{u}(0,t)= f(-at)=\mu(t),$$

откуда

$$f(z)=\mu(-\frac{z}{a}),$$

так что

$$\tilde{u}(x,t)=\mu(-\frac{x-at}{a})= \mu(t-\frac{x}{a}).$$

Однако эта функция определена лишь в области $x-at\leqslant 0,$ так как $\mu(t)$ определена для $t\geqslant 0$. На рисунке эта область изображается заштрихованной частью фазовой плоскости.

Чтобы найти $\bar{u}(x,t)$ для всех значений аргументов, продолжим функцию $\mu(t)$ на отрицательные значения t, полагая $\mu(t)=0$ для $t<0$. Тогда функция

$$\bar{u}(x,t)=\mu(t-\frac{x}{a})$$

будет определена для всех значений аргументов и будет удовлетворять нулевым начальным условиям.

Сумма этой функции и функции (4.4.1), представляет решение первой краевой задачи для однородного уравнения колебаний. Для полуограниченной струны:

$$u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha & \text{для} \quad t<\dfrac{x}{a}, \\ \mu(t-\dfrac{x}{a}+\dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha & \text{для} \quad t>\dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

Аналогично может быть построено решение второй краевой задачи.

4.5. Задачи для ограниченного отрезка

Рассмотрим краевые задачи для ограниченного отрезка $(0,l)$. Будем искать решение уравнения

$$u_{tt}=a^2u_{xx},$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(0,t)&=\mu_1(t), \\ u(l,t)&=\mu_2(t) \end{aligned}\right\} \quad t\geqslant 0$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Рассмотрим предварительно случай однородных граничных условий

$$u(0,t) = u(l,t) = 0.$$

Будем искать решение задачи в этом случае методом продолжения, предполагая возможность следующего представления

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha)\,d\alpha,$$

где Φ и Ψ – функции, подлежащие определению. Начальные условия

$$\left. u(x,0) = \Phi(x) = \varphi(x), u_t(x,0) = \Psi(x) = \psi(x) \right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l$$

определяют значения Φ и Ψ в интервале $(0,l)$.

Чтобы удовлетворить нулевым граничным условиям, наложим на функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ требования нечетности относительно точек $x=0, x=l$

$$\Phi(x) = -\Phi(-x), \quad \Phi(x) = -\Phi(2l-x),$$
$$\Psi(x) = -\Psi(-x), \quad \Psi(x) = -\Psi(2l-x).$$

Сопоставляя эти равенства получим:

$$\Phi(x') = \Phi(x'+2l)(x' = -x)$$

и аналогично для $\Psi(x)$,

$$\Psi(x') = \Psi(x'+2l)(x' = -x),$$

т.е. Φ и Ψ являются периодическими функциями с периодом $2l$.

Нетрудно видеть, что условия нечетности относительно начала координат и условия периодичности определяют продолжение $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ на всей прямой $-\infty < x < \infty$. Подставляя их в формулу (4.1.9), получаем решение задачи.

Рассмотрим теперь задачу о распространении граничного режима. Будем искать решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x) = 0,$$
$$u_t(x,0) = \psi(x) = 0$$

и граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= \mu(t), \\ u(l,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad t > 0.$$

Тогда при $t < \dfrac{l}{a}$ решением служит функция

$$u(x,t) = \bar{\mu}(t - \frac{x}{a}), \quad \bar{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t), t > 0, \\ 0, t < 0. \end{cases}$$

Однако эта функция не удовлетворяет граничному условию

$$u(l,t)=0 \quad \text{при} \quad t>\frac{l}{a}.$$

Рассмотрим "отраженную" волну, идущую налево и имеющую при $x=l$ отклонение, равное $\bar{\mu}(t-\frac{l}{a})$. Ее аналитическое выражение дается формулой

$$\bar{\mu}\left(t-\frac{l}{a}-\frac{l-x}{a}\right)=\bar{\mu}\left(t-\frac{2l}{a}+\frac{x}{a}\right).$$

Легко проверить, что разность двух волн

$$\bar{\mu}(t-\frac{x}{a})-\bar{\mu}(t-\frac{2l}{a}+\frac{x}{a})$$

есть решение уравнения $t<\frac{2l}{a}$.

Продолжая этот процесс далее, получим решение в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\mu}(t-\frac{2nl}{a}-\frac{x}{a})-\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\mu}(t-\frac{2nl}{a}+\frac{x}{a}) \tag{4.5.1}$$

содержащего (для каждого фиксированного t) только конечное число отличных от нуля членов, ибо с каждым новым отражением аргумент уменьшается на $\frac{2l}{a}$, а функция $\bar{\mu}(t)=0$ для $t<0$.

Выполнение граничных условий проверяется непосредственно. В самом деле, положим $x=0$ и выделим из первой суммы отдельно первое слагаемое при $n=0$, равное $\mu(t)$. Остальные слагаемые первой и второй сумм, соответствующие одинаковым значениям n, взаимно уничтожаются; это показывает, что $u(0,t)=\mu(t)$.

Заменяя n на $n-1$ и изменяя в связи с этим пределы суммирования, преобразуем первую сумму к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\mu}(t-\frac{2nl}{a}+\frac{2l-x}{a}).$$

Полагая теперь $x=l$ непосредственно убеждается в том, что слагаемые первой и второй сумм взаимно уничтожаются.

Начальные условия также проверяются непосредственно, так как аргументы всех функций отрицательные при $t=0$ и выражение (4.5.1) при $t=0$ равно нулю.

Аналогично, функция

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\mu}(t-\frac{(2n+1)l}{a}+\frac{x}{a})-\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\mu}(t-\frac{(2n+1)l}{a}-\frac{x}{a})$$

дает решение однородного уравнения с нулевыми начальными условиями $u(x,0)=0, u_t(x,0)=0$ и граничными условиями $u(0,t)=0$ и $u(l,t)=\mu(t)$.