

Примеры

Пример 1. Линейные пространства свободных векторов V_3 , V_2 и V_1 (см. глава 1), очевидно, являются линейными пространствами.

Пример 2. Рассмотрим множество A^n , элементами которого являются упорядоченные совокупности n произвольных комплексных (вещественных) чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Элементы этого множества обозначим одним символом x , т.е. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. В множестве A^n операции сложения элементов и умножения элементов на комплексные (вещественные) числа определим правилами:

$$x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda x = \lambda (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Очевидно, что нулевым элементом рассматриваемого множества является элемент $\theta = (0, \dots, 0)$, а противоположным для элемента $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является элемент $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$. Нетрудно проверить справедливость всех остальных аксиом линейного пространства.

Пример 3. Множество M_{mn} всех матриц порядка $m \times n$ с введенными ранее операциями сложения матриц и умножения матрицы на число является линейным пространством. (Справедливость свойств 3.1 – 3.8 доказана в гл. 5 п. 1).

Пример 4. Рассмотрим множество $C[a, b]$ всех непрерывных на отрезке $a \leq t \leq b$ функций. Операции сложения и умножения на число определим обычными правилами математического анализа. Без труда проверяется справедливость свойств 3.1 – 3.8. Следовательно, $C[a, b]$ – линейное пространство.

Замечание 3. Очевидно, также, что множество $C^n[a, b]$ всех функций, имеющих непрерывную на отрезке $a \leq t \leq b$ производную n -го порядка и с такими же операциями сложения и умножения на число, как в $C[a, b]$, образует линейное пространство.

Пример 5. Совокупность всех многочленов $P_n(t)$ степени, не превышающей натурального числа n , с обычными операциями сложения многочленов и умножения на число образует линейное пространство.

Пример 6. Совокупность всех решений однородной системы образует линейное пространство.

Пример 7. Произведение линейных пространств. Пусть X и Y – два комплексных (вещественных) линейных пространства. Рассмотрим множество $X \times Y$, элементами которого являются упорядоченные наборы (x, y) , где $x \in X$, а $y \in Y$. В этом множестве $X \times Y$ введем операции сложения элементов и умножения на число по правилам:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Множество $X \times Y$ с так введенными операциями, очевидно, является линейным пространством, которое называется прямым произведением (или просто произведением) линейных пространств X и Y .

Укажем некоторые примеры множеств, по той или иной причине не являющиеся линейными пространствами.

Все векторы линейного пространства свободных векторов V_3 , координаты которых – целые числа, не образуют линейного пространства, так как в этом множестве не определена операция умножения на дробные числа.

Пример 8. Множество всех многочленов степени большей некоторого натурального числа n не является линейным пространством, так как элементы этого множества нельзя умножать на число 0.

Пример 9. Рассмотрим множество A^n , элементами которого являются упорядоченные совокупности n чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Операции сложения и умножения на число определим правилами:

$$x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Тогда с одной стороны имеем $2x = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n)$, а с другой $x + x = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n)$ и, следовательно, свойство 7.7 не выполняется. Таким образом, множество с так введенными операциями сложения и умножения на число не является линейным пространством.

Пример 10. В пространстве A^n элементы $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ линейно независимы (см. пример 3.10). Кроме того, для любого $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, очевидно, $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$. Следовательно, элементы $e_1, e_2, \dots, e_n$ являются базисом по определению 7.6 пространства A^n , $\dim A_n = n$.

Пример 11. В пространстве $\{P_n(t)\}$ – многочленов степени, не превышающей натурального числа n элементы $e_1 = 1, e_2 = t, \dots, e_{n+1} = t^n$ линейно независимы (см. пример 3.11). Кроме того, для любого многочлена $P_n(t) = a_0 e_1 + a_1 e_2 + \dots + a_n e_{n+1}$. Следовательно, многочлены $e_1 = 1, e_2 = t, \dots, e_{n+1} = t^n$ образуют в пространстве $\{P_n(t)\}$ базис и $\dim \{P_n(t)\} = n + 1$.

Пример 12. В пространстве M_{mn} всех матриц порядка $m \times n$ матрицы E_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ образуют базис, так как они линейно независимы (см. пример 3.12) и для любой матрицы $A = [a_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ имеет место разложение $A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$. Следовательно, $\dim M_{mn} = mn$.

Пример 13. В пространстве H_0 – решений однородной системы линейных алгебраических уравнений $A \underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}$, где A – матрица порядка $m \times n$, $\text{Rang } A = r$, фундаментальная система решений $\underset{\downarrow}{y_1}, \underset{\downarrow}{y_2}, \dots, \underset{\downarrow}{y_{n-r}}$ является базисом, так как они линейно независимы и любое решение однородной системы линейно выражается через них, следовательно, $\dim H_0 = n - r$.