Лекция 3

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Определение и примеры линейных пространств

1. Определение линейного вещественного (комплексного) пространства

Определение 3.1. Пусть V – произвольное непустое множество. Будем говорить, что в множестве V определена операция сложения элементов, если указан закон, по которому любой паре элементов $x, y \in V$, взятых в определенном порядке, однозначным образом ставится в соответствие некоторый третий элемент этого множества, называемый суммой элементов x, y и обозначаемый $x + y$.

Аналогично будем говорить, что в множестве V определена операция умножения на вещественные (комплексные) числа, если указан закон, по которому каждому элементу $x \in V$ и каждому $\lambda \in R$ ($\lambda \in C$) ставится в соответствие однозначным образом некоторый третий элемент этого множества, называемый произведением λ на x и обозначаемый λx .

Определение 3.2. Непустое множество V элементов произвольной природы называется вещественным (комплексным) линейным пространством, если для элементов этого множества определены операции сложения и умножения на вещественные (комплексные) числа и обладающие для любых $x, y, z \in V$ и любых $\lambda, \mu \in R$ ($\lambda, \mu \in C$) следующими свойствами (аксиомами):

Свойство 3.1. $x + y = y + x$ (коммутативность).

Свойство 3.2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность).

Свойство 3.3. Существует нулевой элемент θ , такой что $x + \theta = x$.

Свойство 3.4. Для любого элемента $x \in V$ существует противоположный элемент $x' \in V$, такой, что $x + x' = \theta$

Свойство 3.5. Для любого $x \in V$ $1 \cdot x = x$ (унитарность)

Свойство 3.6. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

Свойство 3.7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Свойство 3.8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Замечание 3.1. Элементы линейного пространства принято называть также векторами, а само линейное пространство называют иногда абстрактным векторным пространством.

Утверждение 3.1. В произвольном линейном пространстве V : 1) существует единственный нулевой элемент; 2) для любого элемента $x \in V$ существует единственный противоположный элемент; 3) нулевой элемент θ равен произведению произвольного элемента $x \in V$ на вещественное число 0, т.е. $\theta = 0 \cdot x$; 4) для любого элемента $x \in V$ противоположный элемент равен произведению этого элемента на вещественное число (-1) .

Доказательство. 1) Предположим, что существуют два нулевых элемента θ_1 и θ_2 (существование хотя бы одного нулевого элемента утверждается в свойстве 3.3: определения линейного пространства). Единственность нулевого элемента следует тогда из цепочки равенств:

$$\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$$

2) предположим, что для некоторого элемента $x \in V$ существуют два противоположных элемента x' и x'' (существование хотя бы одного противоположного элемента утверждается в свойстве 3.4.) Тогда $x + x' = \theta$ и $x + x'' = \theta$. Единственность противоположного элемента следует из цепочки равенств:

$$x' = x' + \theta = x' + (x + x'') = (x' + x) + x'' = \theta + x'' = x''$$

3) пусть x – произвольный элемент, а x' – противоположный ему элемент, т.е. $x + x' = \theta$. Утверждение о представлении нулевого элемента следует тогда из цепочки равенств:

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= 0 \cdot x + \theta = 0 \cdot x + (x + x') = (0 \cdot x + x) + x' = \\ &= (0 \cdot x + 1 \cdot x) + x' = (0 + 1)x + x' = 1 \cdot x + x' = x + x' = \theta; \end{aligned}$$

4) если $x \in V$ – произвольный элемент, то утверждение о представлении противоположного элемента следует из цепочки равенств:

$$x + (-1)x = 1 \cdot x + (-1)x = [1 + (-1)]x = 0 \cdot x = \theta. \#$$

Замечание 3.2. Разностью двух элементов $x, y \in V$ называется элемент z , удовлетворяющий условию $z + y = x$.

Из 4) (см. утверждение 3.1) следует, что $z = x + (-1)y$. Разность элементов x и y обозначается символом $x - y$.

Упражнение 3.1. Показать, что для любого $\lambda: \lambda \cdot \theta = \theta$;

из равенства $\lambda x = \theta$, $\lambda \neq 0$ следует, что $x = \theta$;

из равенства $\lambda x = \theta$, $x \neq 0$ следует, что $\lambda = 0$.

§ 2. Линейная зависимость. Базис и размерность линейного пространства

1. Линейная зависимость и размерность

Определение 3.3. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ - любые числа, тогда элементы $x_1, x_2, \dots, x_k$ линейного пространства V называются линейно независимыми, если из равенства

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = \theta \quad (3.1)$$

следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Элементы $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ называются линейно зависимыми, если найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ не все равные нулю ($|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_k| \neq 0$), такие, что справедливо равенство (3.1).

Определение 3.4. Элемент x пространства V есть линейная комбинация элементов $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$, если существуют числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, такие, что

$$x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k.$$

Справедлив следующий критерий линейной зависимости элементов линейного пространства.

Теорема 3.1. Элементы $x_1, x_2, \dots, x_k$ линейного пространства V линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из элементов является линейной комбинацией остальных.

Доказательство. Необходимость. Пусть элементы $x_1, x_2, \dots, x_k$ линейно зависимы. Следовательно, в равенстве (3.1) не все коэффициенты λ_i равны нулю. Предположим для определенности, что $\lambda_1 \neq 0$. Тогда из равенства (3.1) получим, что

$$x_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) x_2 + \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) x_3 + \dots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right) x_k.$$

Из этого равенства следует необходимость утверждения, сформулированного в теореме.

Достаточность. Пусть один из элементов (для определенности x_1) – линейная комбинация остальных, т.е. имеет место равенство

$$x_1 = \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \dots + \beta_k x_k$$

$$\text{или } (-1)x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \dots + \beta_k x_k = \theta$$

Так как среди чисел $(-1), \beta_2, \dots, \beta_k$ по крайней мере одно отлично от нуля, то согласно определению элементы $x_1, x_2, \dots, x_k$ линейно зависимы. #

Отметим еще некоторые достаточные условия линейной зависимости и линейной независимости элементов.

1. Если среди элементов $x_1, x_2, \dots, x_k$ имеется нулевой, то элементы $x_1, x_2, \dots, x_k$ линейно зависимы.

2. Если в системе элементов $x_1, x_2, \dots, x_k$ некоторая подсистема элементов линейно зависима, то и вся система $x_1, x_2, \dots, x_k$ линейно зависима.

3. Если вся система элементов линейно независима, то и любая подсистема элементов линейно независима.

Доказательство. 1. Без ограничения общности можно считать, что $x_1 = \theta$. Тогда равенство (3.1) справедливо при

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0.$$

2. Пусть для определенности элементы $x_1, x_2, \dots, x_l$ ($l < k$) линейно зависимы, т.е. справедливы равенства:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_l x_l = \theta \quad (|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_l| \neq 0)$$

Тогда с теми же числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ и $\lambda_{l+1} = \dots = \lambda_k = 0$, очевидно, справедливо равенство (3.1).

3. Предполагая линейную зависимость подсистемы элементов, согласно предыдущему свойству получаем, что и вся система элементов линейно зависима, что противоречит условию 3. #

Утверждение 3.2. Если система элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейного пространства V линейно зависима, а система $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ линейно независима, то элемент x_n равен линейной комбинации элементов $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

Доказательство. Так как элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно зависимы, то существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ не все равные нулю, такие, что $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n = \theta$. Очевидно, $\lambda_n \neq 0$, так как в противном случае элементы $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ были бы линейно зависимы. Следовательно,

$$x_n = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{n-1} x_{n-1}, \text{ где } \beta_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_n}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \#$$

Пример 3.10. 1) В пространстве A^n элементы

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

.....

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

линейно независимы. Действительно, линейная комбинация элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ с числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ представляет собой элемент $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, который является нулевым только при

условии $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. А это и означает линейную независимость элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Пример 3.11. В пространстве $\{P_n(t)\}$ многочленов степени, не превышающей натурального числа n , элементы $1, t, t^2, \dots, t^n$ линейно независимы. Действительно, то, что линейная комбинация этих элементов с коэффициентами $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ равна нулевому элементу, означает, что многочлен $\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \dots + \lambda_n t^n$ тождественно равен нулю, т.е. $\lambda_0 + \lambda_1 t + \dots + \lambda_n t^n \equiv 0$. Для любого $k = 0, 1, 2, \dots, n$, дифференцируя последнее равенство по t k раз и подставляя $t = 0$, получаем $k! \lambda_k = 0$, т.е. $\lambda_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, n$. Но это и означает, что $1, t, t^2, \dots, t^n$ линейно независимы.

Пример 3.12. В пространстве M_{mn} всех матриц порядка $m \times n$ матрицы E_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ (E_{ij} матрица, у которой элемент, стоящий на пересечении i -ой строки и j -го столбца равен 1, а все остальные элементы равны нулю) линейно независимы. Действительно, линейная комбинация элементов E_{ij} с числами λ_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$) представляет собой матрицу:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix}$$

которая является нулевой только при условии $\lambda_{ij} = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Определение 3.5. Линейное пространство V называется n -мерным, если в нем существует n линейно независимых элементов, а любые $n+1$ элементов линейно зависимы. При этом n называется размерностью пространства V . Тот факт, что пространство V имеет размерность n , символически записывает следующим образом: $\dim V = n$.

Линейное пространство V называется бесконечномерным, если для любого целого числа $N > 0$ в нем найдется линейно независимая система, состоящая из N элементов.

Замечание 3.4. Пространство $C[0, 1]$ является бесконечномерным, так как для любого целого $n > 0$ n элементов $1, t, t^2, \dots, t^n$, принадлежащих $C[0, 1]$, линейно независимы.

В дальнейшем будут рассматриваться в основном только линейные пространства конечной размерности.

2. Базис и координаты в n -мерном пространстве

Определение 3.6. Упорядоченная совокупность элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейного пространства V называется базисом в пространстве V , если она линейно независима и для любого элемента $x \in V$ найдутся числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, такие, что справедливо равенство:

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n. \quad (3.2)$$

При этом представление (3.2) называется разложением элемента x по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$, а числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ называются компонентами или координатами элемента x в данном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Лемма 3.1. Для любого элемента x линейного пространства V разложение по базису единственно, т.е. координаты элемента x в данном базисе определяются единственным способом.

Доказательство. Допустим, что в пространстве V для элемента x существуют два разложения: $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$ и $x = \xi'_1 e_1 + \xi'_2 e_2 + \dots + \xi'_n e_n$ по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$. Вычитая из первого второе разложение, получаем:

$$(\xi_1 - \xi'_1)e_1 + (\xi_2 - \xi'_2)e_2 + \dots + (\xi_n - \xi'_n)e_n = \theta.$$

Так как $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы, то из последнего равенства следует $\xi_1 - \xi'_1 = \xi_2 - \xi'_2 = \dots = \xi_n - \xi'_n = 0$, т.е. $\xi_1 = \xi'_1, \xi_2 = \xi'_2, \dots, \xi_n = \xi'_n$. #

Можно ввести второе определение базиса.

Определение 3.7. Упорядоченная совокупность элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейного пространства V называется базисом в пространстве V , если для любого элемента $x \in V$ найдутся числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, такие, что справедливо равенство (3.2) и это разложение единственно для любого x .

Справедливо следующее

Утверждение 3.3. Определение 3.6 базиса и определение 3.7 эквивалентны.

Доказательство. Согласно предыдущей лемме из определения 3.6 немедленно следует определение 3.7.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$, есть базис пространства по второму определению. Для того чтобы показать, что элементы $e_1, e_2, \dots, e_n$ являются базисом пространства V и по первому определению, достаточно показать линейную независимость элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$. Для этого рассмотрим равенство:

$$\theta = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n, \quad (3.3)$$

которое можно считать разложением нулевого элемента θ по базису. Очевидно, что равенство справедливо при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. В силу единственности разложения любого элемента по базису (определение 3.7) равенство (3.3) имеет место только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Следовательно, $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы. #

Теорема 3.2. Пусть в конечномерном пространстве V задан некоторый базис. Тогда при сложении любых элементов пространства V координаты их (относительно этого базиса) складываются; при умножении любого элемента из V на произвольное число λ все координаты этого элемента умножаются на λ .

Доказательство. Утверждение теоремы немедленно следует из аксиом линейного пространства и второго определения базиса. #

3. Связь между понятиями базиса и размерности линейного пространства

Теорема 3.3. а) Если V – конечномерное пространство размерности n , то всякие n линейно независимых элементов пространства образуют базис этого пространства;

б) если в линейном пространстве V имеется базис, состоящий из n элементов, то размерность пространства V равна n .

Доказательство. а) Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – произвольная линейно независимая система элементов пространства V (существование хотя бы одной такой системы следует из определения размерности линейного пространства). Если x – произвольный элемент пространства V , то согласно определению размерности линейного пространства элементы $e_1, e_2, \dots, e_n, x$ линейно зависимы, т.е. существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ не все равные нулю, такие, что $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n + \lambda_{n+1} x = \theta$. Из утверждения 3.2 следует, что $\lambda_{n+1} \neq 0$ и, следовательно, $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$, где $\xi_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Так как x – произвольный элемент пространства V , то последнее равенство доказывает первую часть теоремы;

б) пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис пространства V . Для завершения доказательства данной теоремы достаточно показать, что любые $n+1$ элементов $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ линейного пространства V линейно зависимы. Чтобы показать это, разложим каждый элемент из системы $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$

1) Найти размерность и базис линейного пространства V , элементами которого являются матрицы вида

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta - \alpha \\ 0 & \beta & \alpha \\ \gamma & 0 & \beta + \gamma \end{bmatrix}.$$

2) Доказать линейную независимость системы функций $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – попарно различные действительные числа.

3) Доказать, что каждая из двух систем векторов является базисом пространства A^3 и найти связь координат одного и того же вектора в этих двух базисах: $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (0, -1, -1)$, $e_3 = (1, -1, -1)$; $f_1 = (1, -1, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

4) Дополнить векторы $a_1 = (0, 1, 1, 2)$ и $a_2 = (1, 2, -1, 1)$ до базиса пространства A^4 .

5) Найти базис линейной оболочки натянутой на векторы $a_1 = (1, 0, 0, -1)$, $a_2 = (1, 2, 1, -1)$, $a_3 = (0, 1, 1, 0)$, $a_4 = (0, 1, 0, 0)$, $a_5 = (0, 2, 1, 0)$. Найти систему линейных уравнений, задающую эту линейную оболочку.

6) Найти разложение вектора $x = (4; -1; -8; 4)$ по векторам ортогонального базиса $e_1 = (1, 2, 2, -1)$, $e_2 = (2, 3, -3, 2)$, $e_3 = (2, -1, -1, -2)$, $e_4 = (-3, 2, -2, -3)$.

7) Доказать, что если вектора $a_1, a_2, \dots, a_k$ линейно выражаются через векторы $b_1, b_2, \dots, b_m$, то ранг первой системы не превышает ранга второй (максимальное число линейно независимых элементов в системе $a_1, a_2, \dots, a_k$, иначе $\dim L(a_1, a_2, \dots, a_k)$, называется рангом данной системы $a_1, a_2, \dots, a_k$).