

# ПРЕДМЕТ: Аналитическая геометрия и линейная алгебра

## Лекция 5

### Определение смешанного произведения трех векторов и его геометрические свойства

Пусть даны три произвольных вектора  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$ .

**Определение 1.18.** Если вектор  $\vec{a}$  векторно умножается на вектор  $\vec{b}$ , а затем получившийся вектор  $[\vec{a}, \vec{b}]$  скалярно умножим на вектор  $\vec{c}$ , то в результате получается число  $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$ , называемое смешанным произведением трех векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , которое обозначается  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ , т.е.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \overset{\text{опр}}{([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})}.$$

Геометрические свойства смешанного произведения:

- 1)  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  – компланарны;
- 2) смешанное произведение  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  равно объему параллелепипеда, построенного на

приведенных к общему началу векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , взятому со знаком плюс, если тройка  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  правая, и со знаком минус, если тройка  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  левая;

3)  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$ , т.е. квадратные скобки (векторное умножение) в смешанном произведении можно ставить произвольно.

**Доказательство.** Предположим, что вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллельны некоторой плоскости  $\pi$ . Из определения смешанного произведения и по условию свойства 1)  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = 0$ .

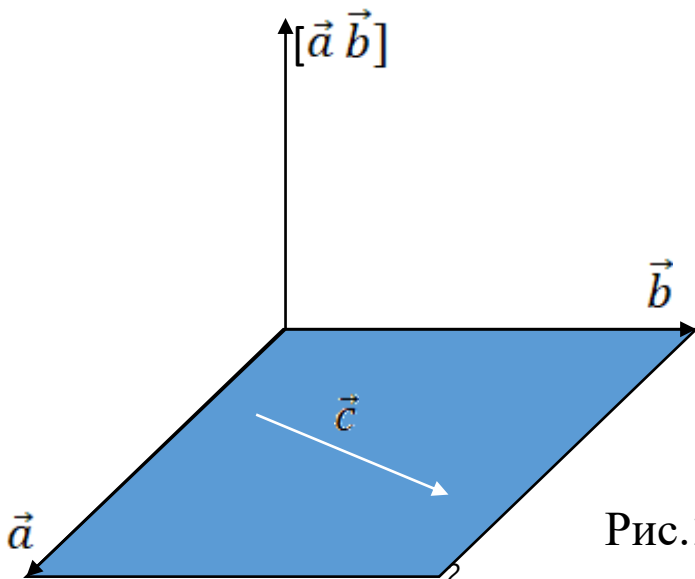


Рис.17

Следовательно, из критерия ортогональности двух векторов и определения векторного произведения, получим  $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{c} \Leftrightarrow \vec{c} \parallel \pi$ . Значит,  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  – компланарны;

2) Предположим, что вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны. В этом случае векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  будут  $\diamond$ компланарными, так как среди трех некопланарных векторов не существуют коллинеарные вектора. Из свойства 1) следует смешанное произведения векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  будет равно нулю. Объём параллелепипеда тоже равен нулю.

Теперь рассмотрим случай, когда векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не коллинеарны. Обозначим через  $S$  площадь параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Тогда из свойств скалярного произведения и определения проекции вектора на ось имеем

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = |[\vec{a}, \vec{b}]| np_{[\vec{a}, \vec{b}]} \vec{c} = S \cdot np_{[\vec{a}, \vec{b}]} \vec{c}.$$

Предположим, что векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  не компланарны. Тогда  $np_{[\vec{a}, \vec{b}]} \vec{c}$  с точностью до знака равна высоте  $h$  параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , при условии, что основанием параллелепипеда служит параллелограмм построенных на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (см. рис. 18).

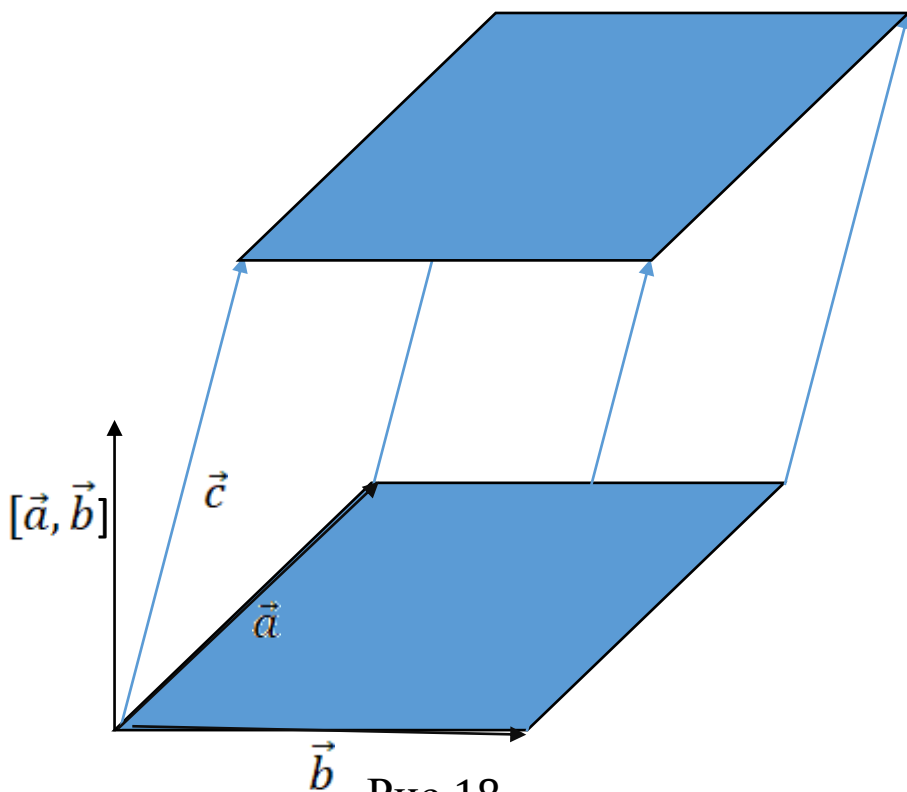


Рис.18

Таким образом, с точностью до знака правая часть совпадает с объемом  $V$  параллелепипеда построенный на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , которые приведены к общему началу. Тогда

$$h = \begin{cases} +|\vec{c}|\cos\varphi, & \text{если } \cos\varphi > 0 \\ \text{или если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{правая тройка векторов,} \\ -|\vec{c}|\cos\varphi, & \text{если } \cos\varphi < 0 \\ \text{или если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{левая тройка векторов.} \end{cases}$$

Так как  $V = S \cdot h$ , то из приведенных рассуждений следует

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \begin{cases} +\text{объем } V, & \text{если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{правая тройка векторов,} \\ -\text{объем } V, & \text{если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{левая тройка векторов.} \end{cases}$$

3) из коммутативности скалярного произведения следует, что  $(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = ([\vec{b}, \vec{c}], \vec{a})$ , а в силу предыдущего свойства как  $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$ , так и  $([\vec{b}, \vec{c}], \vec{a})$  с точностью до знака равны объему параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , которые приведены к общему началу. Но так как тройки  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  и  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$  имеют одинаковую ориентацию, то и знаки чисел  $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$  и  $([\vec{b}, \vec{c}], \vec{a})$  совпадают. Следовательно,  $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ . #

Доказанное равенство  $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$  позволяет записывать сме-

шанное произведение трех векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  просто в виде  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ , не указывая при этом, какие именно два вектора (первые два или последние два) перемножаются векторно.

Доказательство третье алгебраическое свойства векторного произведения

3) а) пусть  $\vec{x}$  – любой вектор, тогда в силу произвола расстановки квадратных скобок в смешанном произведении (геометрические свойства смешанного произведения 3)) и в силу линейности скалярного произведения получим:

$$\begin{aligned} & ([(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}), \vec{c}], \vec{x}) = ([\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}], [\vec{c}, \vec{x}]) = \\ & = \lambda (\vec{a}, [\vec{c}, \vec{x}]) + \mu (\vec{b}, [\vec{c}, \vec{x}]) = \lambda ([\vec{a}, \vec{c}], \vec{x}) + \mu ([\vec{b}, \vec{c}], \vec{x}), \end{aligned}$$

т.е. для  $\forall \vec{x}$  имеем:

$$([\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}), \vec{c}], \vec{x}) = ((\lambda [\vec{a}, \vec{c}] + \mu [\vec{b}, \vec{c}]), \vec{x}).$$

Поэтому по основной лемме скалярного произведения имеем

$$([\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}), \vec{c}] = \lambda [\vec{a}, \vec{c}] + \mu [\vec{b}, \vec{c}];$$

б) следует из антикоммутативности векторного произведения и линейности его по первому множителю. Действительно,

$$[\vec{a}, (\lambda \vec{b} + \mu \vec{c})] = -[(\lambda \vec{b} + \mu \vec{c}), \vec{a}] = \\ = -\lambda [\vec{b}, \vec{a}] - \mu [\vec{c}, \vec{a}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}] + \mu [\vec{a}, \vec{c}].$$

## 5. Алгебраические свойства смешанного произведения

Смешанное произведение обладает следующими алгебраическими свойствами:

1) смешанное произведение  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  равно нулю, если один из сомножителей нулевой вектор или имеется два одинаковых сомножителя;

2) от перемены мест двух сомножителей смешанное произведение меняет знак, например  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ ;

3) смешанное произведение линейно по каждому сомножителю, т.е.

$$а) ((\lambda \vec{a} + \mu \vec{d}), \vec{b}, \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \mu (\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}),$$

$$б) (\vec{a}, (\lambda \vec{b} + \mu \vec{d}), \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \mu (\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})$$

$$в) (\vec{a}, \vec{b}, (\lambda \vec{c} + \mu \vec{d})) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \mu (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$$

4) если к одному вектору смешанного произведения прибавить любой другой его вектор, умноженный на произвольное число, то величина смешанного произведения не изменится, например

$$\left( (\vec{a} + \lambda \vec{b}), \vec{b}, \vec{c} \right) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c});$$

5) для  $\forall \lambda \in R: ((\lambda \vec{a}), \vec{b}, \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .

Доказательство. 1) Если в тройке  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  один из векторов равен нулю или имеется два одинаковых вектора, то  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  компланарны и, следовательно,  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$  (геометрические свойства смешанного произведения 1));

$$2) (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = -([\vec{b}, \vec{a}], \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c});$$

3) следует из равенства  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$  и из линейности векторного и скалярного произведения. Действительно, докажем равенство а) (равенства б) и в) доказываются аналогично).

$$\begin{aligned} ((\lambda \vec{a} + \mu \vec{d}), \vec{b}, \vec{c}) &= ([(\lambda \vec{a} + \mu \vec{d}), \vec{b}], \vec{c}) = ((\lambda [\vec{a}, \vec{b}] + \mu [\vec{d}, \vec{b}]), \vec{c}) \\ &= \lambda ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) + \mu ([\vec{d}, \vec{b}], \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \mu (\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}); \end{aligned}$$

$$4) \left( (\vec{a} + \lambda \vec{b}), \vec{b}, \vec{c} \right) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \lambda (\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Здесь были использованы доказанные в этом пункте свойства 1 и 3. Свойство 5 следует из 3 а) (при  $\mu = 0$ ). #

## 6. Координатная запись смешанного произведения

Пусть  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  – произвольный базис  $V_3$  и пусть заданы разложения векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  по векторам базиса  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ , т.е.

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{l}_1 + \alpha_2 \vec{l}_2 + \alpha_3 \vec{l}_3; \quad \vec{b} = \beta_1 \vec{l}_1 + \beta_2 \vec{l}_2 + \beta_3 \vec{l}_3,$$
$$\vec{c} = \gamma_1 \vec{l}_1 + \gamma_2 \vec{l}_2 + \gamma_3 \vec{l}_3.$$

Найдем выражение смешанного произведения векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  через их компоненты  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  и  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  в произвольном базисе  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ . Для этого запишем смешанное произведение  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  в виде  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$ . Учитывая (лекция 4, п.6, формула (1.10)) и линейность скалярного произведения, получаем

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \gamma_1 ([\vec{l}_2, \vec{l}_3], \vec{l}_1) +$$
$$(\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) \gamma_2 ([\vec{l}_3, \vec{l}_1], \vec{l}_2) + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \gamma_3 ([\vec{l}_1, \vec{l}_2], \vec{l}_3).$$

(Здесь не выписывались слагаемые, содержащие смешанные произведения с равными сомножителями, так как они равны нулю (свойства векторного произведения)) Учитывая равенства

$(\vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_1) = (\vec{l}_3, \vec{l}_1, \vec{l}_2) = (\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3) = (\vec{l}_1, \vec{l}_2, l_3)$ , получаем

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \{\gamma_1 (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) + \gamma_2 (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) + \gamma_3 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)\} (\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3). \quad (1.12)$$

Отметим, если  $(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3)$  – правый ОНБ, то  $(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3) = 1$ , если –  $(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3)$  – левый ОНБ, то  $(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3) = -1$  и, следовательно, получаем следующее следствие.

Следствие 1.5. Смешанное произведение трех векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  выражается через их координаты  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  и  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  в ОНБ по формуле

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pm \{\gamma_1 (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) + \gamma_2 (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) + \gamma_3 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)\} \quad (1.13)$$

при этом в правой части (1.13) берется знак «+», если  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  – правый ОНБ и знак «–», если  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  – левый ОНБ.

Формулы (1.10)–(1.13) для векторного и смешанного произведения достаточно громоздки. Для их более наглядной записи можно использовать определители второго и третьего порядков.

Рассмотрим таблицу:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

из четырех чисел  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ . Таблицы такого вида называются квадратными матрицами второго порядка. Определителем второго порядка, соответствующим матрице (1.14), называется число, равное  $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$  и обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Аналогично таблица

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

состоящая из девяти чисел  $a_{ik}$ ,  $i, k = 1, 2, 3$  называется квадратной матрицей третьего порядка, а число, которое обозначается символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - \\ - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

называется определителем третьего порядка этой матрицы.

Определитель третьего порядка матрицы (1.15) запишем иначе через определители второго порядка в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \\ - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (1.16)$$

Это определение называется разложением определителя третьего порядка по элементам первой строки.

Из определителя третьего порядка формулы (1.16) и формул (1.10)–(1.13) координатной записи векторного и смешанного произведения следуют выводы.

### Вывод 1.3.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} (\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3), \quad (1.17)$$

если  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  – произвольный базис  $V_3$ ;

#### Вывод 1.4.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pm \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad (1.18)$$

если  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  – ОНБ, причем в правой части берется знак «+», если  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  – правый ОНБ, и знак «–», если  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  – левый ОНБ.

Для записи векторного произведения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , заданного своими координатами  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  в произвольном базисе  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  можно использовать символ определителя, а именно

$$[\vec{a} \vec{b}] = \begin{vmatrix} [\vec{l}_3 \vec{l}_2] & [\vec{l}_3 \vec{l}_1] & [\vec{l}_1 \vec{l}_2] \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}. \quad (1.19)$$

Если же  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  – ОНБ, то формула (1.19) примет вид

$$(\vec{a} \vec{b}) = \pm \begin{vmatrix} \vec{l}_1 & \vec{l}_2 & \vec{l}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}, \quad (1.20)$$

причем в правой части берется знак «+» если  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  – правый ОНБ, и знак «–», если  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  – левый ОНБ.

Замечание 1.8. Раскладывая определители (1.19) и (1.20) по формуле (1.16), очевидно, придем к ранее полученным формулам (1.10), (1.11).

Отметим, что из алгебраических свойств смешанного произведения трех векторов и формулы (1.18) следуют свойства определителей третьего порядка.

1. Если определитель третьего порядка содержит две одинаковые строки или строку, все элементы которой нули, то определитель равен нулю.

2. Перестановка местами двух строк определителя равносильна умножению его на число  $(-1)$ .

3. Определитель обладает свойством линейности по каждой строке, например, для первой строки (для 2-й и 3-й строки аналогично).

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \mu d_1 & \lambda a_{12} + \mu d_2 & \lambda a_{13} + \mu d_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.16)$$

4. Если к элементам некоторой строки

определителя прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на произвольное число  $\lambda$ , величина определителя не изменится.

5. Общий множитель всех элементов некоторой строки определителя можно выносить за знак этого определителя, например,

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. В некотором правом ОНБ  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  рассмотрим векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  с координатами в этом базисе соответственно  $(a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33})$  и  $(d_1, d_2, d_3)$ . Тогда свойства 1–5, очевидно, следуют из формулы (1.10) и алгебраических свойств смешанного произведения. #

Замечание 1.9. Свойства 1–5 справедливы и для определителей второго порядка, что непосредственно следует из равенства:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и свойств 1–5 для определителей третьего порядка. #

## 7. Условия ортогональности, коллинеарности и компланарности векторов

Пусть  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  – произвольный базис в  $V_3$  и пусть три вектора  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  определены своими координатами в этом базисе:

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Тогда

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} [\vec{l}_3, \vec{l}_2] - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} [\vec{l}_3, \vec{l}_1] + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} [\vec{l}_1, \vec{l}_2].$$

Отметим, что если

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{то, очевидно,}$$

$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$  и, следовательно, векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны. Верно и обратное утверждение, т.е. если  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны, что эквивалентно условию  $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ , то

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Действительно, скалярно умножив равенство,

$$\vec{0} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} [\vec{l}_3, \vec{l}_2] - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} [\vec{l}_3, \vec{l}_1] + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} [\vec{l}_1, \vec{l}_2].$$

Соответственно на  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  получим (так как  $(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3) \neq 0$ ), что

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, из только что проведенных рассуждений геометрических свойств скалярного, векторного и смешанного произведения, а также формул (1.9), (1.10), (1.17), получим следующее утверждение.

Утверждение 1.1. Если  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  – произвольный базис  $V_3$ , то  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  компланарны  $\Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Утверждение 1.2. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны  $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3},$$

т.е. координаты этих векторов пропорцио-

нальны (причем пропорция  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu}{\nu}$  здесь и всюду ниже понимается в смысле равенства  $\alpha\nu = \beta\mu$ ).

Утверждение 1.3. Если базис  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  – ортонормированный, то вектор  $\vec{a}$  ортогонален вектору  $\vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0.$$

Следствие 1.6. Векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  из  $V_3$  образуют базис

$$V_3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Утверждение 1.4. 1) Если  $\vec{l}_1, \vec{l}_2$  – произвольный базис  $V_2$  и векторы  $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$  и  $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2)$ , заданы своими координатами в этом базисе, то векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2},$$

т.е. координаты этих векторов пропорциональны.

2) Если  $\vec{l}_1, \vec{l}_2$  – ортонормированный базис пространства  $V_2$ , то векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ортогональны  $\Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = 0$ .

Доказательство следует из утверждения 3 если считать, что

$$\alpha_3 = \beta_3 = 0.$$

Следствие 1.7. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  из  $V_2$  образуют базис

$$V_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

### ***Задачи к лекции 5***

1) Показать, что если  $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = 0$ , то векторы  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны.

2) Показать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

3) Показать, что если  $[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{b}, \vec{c}], [\vec{c}, \vec{a}]$  компланарны, то они коллинеарны.

4) Построить параллелепипед на векторах  $\vec{a} = 3i + 4j$ ,  $\vec{b} = -3j + k$ ,  $\vec{c} = 2j + 5k$  и вычислить его объем.

5) Показать, что векторы  $\vec{a} = -i + 3j + 2k$ ,  $\vec{b} = 2i - 3j - 4k$ ,  $\vec{c} = -3i + 12j + 6k$  компланарны, и разложить вектор  $\vec{c}$  по базису  $\vec{a}, \vec{b}$ .

6) Показать, что точки  $A(2;-1;-2)$ ,  $B(1;2;1)$ ,  $C(2;3;0)$ ,  $D(5;0;-6)$  лежат в одной плоскости.

7) Из одной точки проведены три некопланарных вектора  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$ . Показать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна к вектору  $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}]$ .

## Литература

1. Ильин В.А, Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: Учебник для вузов. 7-е изд., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. -224 с.
2. Сандаков Е.Б. Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Учебное пособие, М.: МИФИ, 2005. – 308 с.
3. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: 1964 г., 440 с.