

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Простейшие типы уравнений первого порядка, интегрируемые в квадратурах: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения и приводящиеся к ним. Линейные уравнения, уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро

1. Простейшие типы уравнений первого порядка, интегрируемые в квадратурах: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения и приводящиеся к ним.

2.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$y' = f(x)g(y) \quad (1)$$

или вида

$$P(x)Q(y)dx + R(x)S(y)dy = 0, \quad (2)$$

где все функции f , g , P , Q , R и S непрерывны.

Решения уравнений данного типа ищутся следующим образом.

1. Перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

и "разделим" переменные:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Для уравнения (2) данный шаг выглядит так:

$$\frac{P(x)}{R(x)}dx = -\frac{S(y)}{Q(y)}dy.$$

2. Проинтегрируем левую часть полученного соотношения по x , а правую по y :

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Пусть $G(y)$ - какая-либо из первообразных функции $1/g(y)$, а $F(x)$ -какая-либо из первообразных функции $f(x)$.

Тогда формула

$$G(y) = F(x) + C, C \in \mathbf{R}, \quad (3)$$

задает решение в неявной форме исходного уравнения (1).

Под этим мы всегда будем понимать следующее:

если дифференцируемая функция $y : I \rightarrow \mathbf{R}$ для некоторого $C \in \mathbf{R}$ удовлетворяет тождеству

$$G(y(x)) = F(x) + C, x \in I,$$

(т.е. неявно задается соотношением (3), то она является решением рассматриваемого уравнения (1).

Для уравнения (2) данный шаг полностью аналогичен.

3. Уравнение (1) имеет еще решения вида

$$y \equiv y_0,$$

где y_0 - корень уравнения $g(y) = 0$. Эти решения были "потеряны," когда мы делили обе части уравнения на $g(y)$.

По тем же причинам уравнение (2) имеет еще решения вида

$$y \equiv y_0,$$

где y_0 - корень уравнения $Q(y) = 0$, и решения вида

$$x \equiv x_0,$$

где x_0 - корень уравнения $R(x) = 0$.

Рассмотрим в качестве примера задачу 51 из "Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям."

Решить уравнение $xydx + (x+1)dy = 0$.

Разделяем переменные:

$$-\frac{xdx}{x+1} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируем левую часть:

$$-\int \frac{xdx}{x+1} = -\int \frac{(x+1-1)dx}{x+1} = \int \frac{dx}{x+1} - \int dx = \ln|x+1| - x + C.$$

Интегрируем правую часть:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln |y| + C.$$

Таким образом, решения нашего уравнения задаются неявно соотношением:

$$\ln |x + 1| - x + C = \ln |y|, C \in \mathbf{R}.$$

Потенцируя, получаем

$$e^C |x + 1| e^{-x} = |y|$$

или

$$\pm e^C (x + 1) e^{-x} = y.$$

Следующий прием будет использоваться неоднократно в дальнейшем. Заметим, что константа e^C может быть произвольным положительным числом. Далее, как видно из формулы, функция y непрерывна и нигде не обращается в нуль, поэтому знак плюс или минус в этом соотношении выбирается не для каждого x отдельно, а сразу для всей области определения. Поэтому можно "включить" знак в произвольную постоянную e^C , которая таким образом будет произвольным положительным или отрицательным числом.

Итак, получили формулу для решений

$$y = C(x + 1)e^{-x}, \quad (4)$$

где C - произвольное число не равное 0. Рассматриваемое уравнение имеет еще решения $y \equiv 0$ и $x \equiv -1$. Первое из них получается, если в формуле (3.4) взять $C = 0$.

Окончательно получаем

$$\begin{cases} y = C(x + 1)e^{-x}, C \in \mathbf{R}, \\ x = -1, \end{cases}$$

Ф.57. Решить уравнение $2x^2yy' + y^2 = 2$.

Сначала перепишем уравнение в виде

$$2x^2y \frac{dy}{dx} = 2 - y^2.$$

Затем разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{2ydy}{2 - y^2} = \int \frac{dx}{x^2}.$$

Для вычисления интеграла, стоящего в левой части, внесем выражение, стоящее в знаменателе, под дифференциал:

$$\int \frac{2ydy}{2-y^2} = - \int \frac{d(2-y^2)}{2-y^2} = -\ln|2-y^2| + C.$$

Таким образом, получаем (C - произвольная постоянная)

$$-\ln|2-y^2| + C = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln|2-y^2| + C = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-y^2 = \pm e^{C e^{1/x}} \Leftrightarrow 2-y^2 = C e^{1/x} \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{2 - C e^{1/x}}.$$

Здесь мы снова включили знак (возникший в связи с избавлением от модуля) в произвольную постоянную, а затем еще учли, что $2-y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}$ - тоже решения нашего уравнения, "потерянные" при делении на $2-y^2$.

Ф.55. Найти решения уравнения, удовлетворяющие заданному начальному условию:

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, y(2) = 0.$$

Сначала найдем общую формулу для решений, а затем отберем решения, удовлетворяющие условию $y(2) = 0$.

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = \int dx \Leftrightarrow \sqrt[3]{y} = x + C \Leftrightarrow y = (x + C)^3.$$

Кроме того, при делении "потеряли" решение $y \equiv 0$. Ясно, что заданному условию удовлетворяют решения $y = (x-2)^3$ и $y \equiv 0$.

Таким образом, получаем совокупность

$$\begin{cases} y = (x-2)^3, \\ y = 0, \end{cases} \quad (5)$$

На первый взгляд кажется, что задача имеет только эти два решения. Однако это не так: легко убедиться, что решением будет всякая функция вида

$$y = \begin{cases} (x - C_1)^3, & x \leq C_1, \\ 0, & x \in [C_1, C_2], \\ (x - C_2)^3, & x \geq C_2 \end{cases} \quad (6)$$

На самом деле, совокупность (6) следует понимать так: решение есть непрерывная функция, определенная на объединении промежутков, на каждом из которых она задается одной из формул совокупности. Именно такой смысл мы и будем в дальнейшем вкладывать в запись решений в виде совокупности типа (5).

2.2. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним. Линейные уравнения

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (7)$$

называется однородным относительно x и y , если $f(x, y)$ есть однородная функция своих аргументов т.е. $f(tx, ty) = f(x, y)$. Однородное уравнение всегда можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (8)$$

Вводя новую искомую функцию $u = \frac{y}{x}$, уравнение (7) можно привести к уравнению с разделяющимися переменными:

$$x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u. \quad (9)$$

Если $u = u_0$ есть корень уравнения $\varphi(u) - u = 0$, то решение однородного уравнения будет $u = u_0$ или $y = u_0 x$ (прямая, проходящая через начало координат).

Замечание. При решении однородных уравнений необязательно приводить их к виду (8). Можно сразу делать подстановку $y = ux$.

Пример 1. Решить однородное уравнение $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

Решение. Запишем уравнение в виде $y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$ так что данное уравнение оказывается однородным относительно x и y . Положим $u = \frac{y}{x}$, или $y = ux$. Тогда $y' = xu' + u$. Подставляя в уравнение выражения для y и y' , получаем $x \frac{du}{dx} = \sqrt{1 - u^2}$.

Разделяем переменные: $\frac{du}{1-u^2} = \frac{dx}{x}$.

Отсюда интегрированием находим

$$\arcsin u = \ln |x| + \ln C_1, \quad (C_1 > 0),$$

или

$$\arcsin u = \ln C_1 |x|.$$

Так как $C_1|x| = \pm C_1x$, то, обозначая $\pm C_1 = C$, получаем $\arcsin u = \ln Cx$, где $|\ln Cx| \leq \frac{\pi}{2}$ или $e^{-\pi/2} \leq Cx \leq e^{\pi/2}$. Заменяя u на $\frac{y}{x}$, будем иметь общий интеграл $\arcsin y/x = \ln Cx$.

Отсюда общее решение: $y = x \sin \ln Cx$.

При разделении переменных мы делили обе части уравнения на произведение $x\sqrt{1-u^2}$, поэтому могли потерять решение, которые обращают в ноль это произведение.

Положим теперь $x = 0$ и $\sqrt{1-u^2} = 0$. Но $x \neq 0$ в силу подстановки $u = \frac{y}{x}$, а из соотношения $\sqrt{1-u^2} = 0$ получаем, что $1 - \frac{y^2}{x^2} = 0$, откуда $y = \pm x$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции $y = -x$ и $y = x$ также являются решениями данного уравнения.

Уравнения, приводящиеся к однородным

А. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right). \quad (10)$$

где a, b, c, a_1, b_1, c_1 постоянные, а $f(u)$ непрерывная функция своего аргумента u .

Если $c = c_1 = 0$, то уравнение (8) является однородным и оно интегрируется, как указано выше.

Если хотя бы одно из чисел c, c_1 отлично от нуля, то следует различать два случая.

1) Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$. Вводя новые переменные ξ и η по формулам $x = \xi + h$, $y = \eta + k$, где h и k пока неопределенные постоянные, приведем уравнение (3) к виду

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta + ah + bk + c}{a_1\xi + b_2\eta + a_1h + b_1k + c_1}\right). \quad (11)$$

Выбирая h и k как решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases} \quad (\Delta \neq 0), (4)$$

получаем однородное уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right).$$

Найдя его общий интеграл и заменив в нем ξ на $x - h$, а $\eta y - k$, получаем общий интеграл уравнения (3).

2) Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Система (4) в общем случае не имеет решений и изложенный выше метод неприменим; в этом случае $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$, следовательно, уравнение (3) имеет вид $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\right)$. Подстановка $z = ax + by$ приводит его к уравнению с разделяющимися переменными.

Линейные уравнения первого порядка Дифференциальное уравнение

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (12)$$

называется линейным уравнением первого порядка. Для того, чтобы решить уравнение (12) сначала решим соответствующее однородное уравнение

$$y' + a(x)y = 0. \quad (13)$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Интегрируя находим

$$y(x) = Ce^{-\int a(x)dx}. \quad (14)$$

Затем считая постоянную C функцией от x дифференцируем и находим

$$y'(x) = C'e^{-\int a(x)dx} - a(x)Ce^{-\int a(x)dx}. \quad (15)$$

Подставляя это выражение в (12) получим

$$C'e^{-\int a(x)dx} = b(x). \quad (16)$$

Из последнего уравнения находим C и подставляя в (14) находим решение уравнения (12).

Рассмотрим задачу 136 из задачника Филиппова

$$xy' - 2y = 2x^4. \quad (17)$$

Решаем однородное уравнение

$$xy' - 2y = 0 \quad (18)$$

и получим

$$y = Cx^2. \quad (19)$$

Дифференцируем эту функцию считая C функцией от x

$$y' = C'x^2 + 2Cx \quad (20)$$

Подставляя в уравнение получим $C' = x$, $C = x^2 + C_1$ и пишем решение исходного уравнения $y = x^4 + C_1x^2$.

Некоторые уравнения становится линейными если поменять местами независимую переменную и искомую функцию, т.е. мы получим линейное уравнение для функции, обратной к искомой функции.

Например следующее уравнение (задача 145 из Филиппова) не является линейным

$$y' = \frac{y}{x + y^2}. \quad (21)$$

Это уравнение напомним в дифференциалах

$$ydx = (x + y^2)dy \quad (22)$$

и затем получим линейное уравнение относительно функции $x = x(y)$

$$x' - \frac{1}{y}x = y. \quad (23)$$

2.3. Уравнение Бернулли, уравнения в полных дифференциалах

Нелинейное уравнение первого порядка

$$y' + a(x)y = b(x)y^m, \quad (24)$$

где $a(x), b(x)$ — непрерывные функции, определенные на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$, $m \neq 0, m \neq 1$ называется уравнением Бернулли. Уравнение Бернулли заменой $z = y^{1-m}$ приводится к линейному уравнению

$$z' + (1 - m)a(x)z = (1 - m)b(x). \quad (25)$$

Рассмотрим в качестве примера задачу 151 из задачника Филиппова. Уравнение Бернулли имеет вид

$$y' + 2y = e^x y^2. \quad (26)$$

Делая замену $z = \frac{1}{y}$ получим линейное уравнение относительно функции

$$z' - 2z = -e^x. \quad (27)$$

Дифференциальное уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (28)$$

называется уравнением в полных дифференциалах если существует функция $F(x, y)$ такая, что

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$$

и

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

В этом случае уравнение (28) может быть написано в виде

$$dF(x, y) = 0$$

и решение в неявной форме задается уравнением $F(x, y) = c$.

Интегрирующим множителем для уравнения (28) называется такая функция $m(x, y)$, после умножения на которую уравнение (28) является уравнением в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель существует теоретически всегда, но нет общего метода нахождения его. В общем случае интегрирующий множитель является функцией от двух переменных. Иногда его можно найти как функцию от одной переменной.

Рассмотрим случай $m(x, y) = m(x)$. Если функция является интегрирующим множителем, то имеет место

$$\frac{\partial m(x)P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial m(x)Q(x, y)}{\partial x}.$$

Из этого равенства мы получаем дифференциальное уравнение для $m(x, y) = m(x)$.

$$\frac{m'(x)}{m} = \frac{P_y - Q_x}{Q}.$$

Если выражение

$$\frac{Q_y - P_x}{Q}$$

является функцией только от x , мы можем найти функцию $m(x, y) = m(x)$.

Аналогично рассматривается случай $m(x, y) = m(y)$. Если выражение

$$\frac{Q_x - P_y}{P}$$

является функцией только от y , мы можем найти функцию $m(x, y) = m(y)$ решая дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{m'(y)}{m} = \frac{Q_x - P_y}{P}.$$

Нелинейное уравнение первого порядка

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x) \quad (29)$$

называется уравнением Риккати.

В общем случае уравнение Риккати не интегрируется в квадратурах. Если известно одно частное решение $y_1(x)$ уравнения Риккати, то заменой $z = y - y_1$ оно приводится к уравнению Бернулли. Иногда частное решение можно подобрать исходя из вида правой части.

Рассмотрим в качестве примера задачу 167 из задачника Филиппова. Уравнение Риккати имеет вид

$$x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4. \quad (30)$$

Уравнение Риккати перепишем в виде

$$y' + \frac{1}{x}y + y^2 = \frac{4}{x^2}. \quad (31)$$

Частное решение ищем в виде $y = \frac{A}{x}$ подставляя в уравнение получим

$$-\frac{A}{x^2} + \frac{A}{x^2} + \frac{A^2}{x^2} = \frac{4}{x^2}. \quad (32)$$

Откуда находим $A = 2$ и делая замену $y = \frac{2}{x} + z$ получим уравнение Бернулли

$$z' + \frac{4}{x}z = -z^2. \quad (33)$$

2.4. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$F(x, y, y') = 0 \quad (34)$$

называется уравнением первого порядка, не разрешенным относительно производной.

Некоторые уравнения этого типа приводятся к одному или нескольким уравнениям вида

$$y' = f(x, y), \quad (35)$$

которые решаются выше приведенными методами.

В общем случае уравнение, не разрешенное относительно производной решается методом введения параметра. Для этого мы положим (введем параметр) $y' = p$.

Если уравнение разрешимо относительно y :

$$y = f(x, p), \quad (36)$$

рассмотрим систему

$$y = f(x, p), dy = p dx \quad (37)$$

В этой системе из первого уравнения находим dy и подставим во второе уравнение. В результате получим уравнение в дифференциалах

$$(f_x - p)dx = f_p dy \quad (38)$$

Если функция $p = h(x, C)$ является общим решением этого уравнения, то функция $y = f(x, h(x, C))$ является общим решением уравнения (35). Если функция $x = h(p, C)$ является общим решением этого уравнения, то общее решение уравнения (35) задается параметрическими уравнениями $y = f(x, p), x = h(p, C)$

Если уравнение разрешимо относительно x :

$$x = F(y, p), \quad (39)$$

рассмотрим систему

$$x = F(y, p), dy = p dx \quad (40)$$

В этой системе из первого уравнения находим dx и подставим во второе уравнение. В результате получим уравнение в дифференциалах

$$(1 - pf_y)dy = pf_p dp \quad (41)$$

Если функция $p = h(y, C)$ является общим решением этого уравнения, то функция $x = f(x, h(y, C))$ является общим решением уравнения (35). Если функция $y = h(p, C)$ является общим решением этого уравнения, то общее решение уравнения (35) задается параметрическими уравнениями $x = f(h(p, C), p)$, $y = h(p, C)$,

Метод введения параметра не всегда приводит к уравнениям, интегрируемым в квадратурах. Уравнение Лагранжа является примером, когда метод введения параметра приводит к уравнению, интегрируемому уравнению в квадратурах.

Уравнение Лагранжа.

Уравнение

$$y = a(y')x + b(y') \quad (42)$$

$a(p), b(p)$ – непрерывные функции, определенные на всей числовой оси, называется уравнением Лагранжа.

Положив $y' = p$ получим систему уравнений

$$y = a(p)x + b(p), dy = p dx. \quad (43)$$

Находим из первого уравнения и подставляя во второе уравнение получим

$$a'(p)x dp + a(p)dx + b'(p)dp = p dx \quad (44)$$

или следующее уравнение

$$[a'(p)x + b'(p)]dp = [p - a(p)]dx. \quad (45)$$

Если $p \neq a(p)$, то получим линейное уравнение первого порядка относительно

$$\frac{dx}{dp} = \frac{a'(p)}{p - a(p)}x + \frac{b'(p)}{p - a(p)} \quad (46)$$

Если для некоторого p_0 имеет место $a(p_0) = p_0$, то функция $y = p_0x + b(p_0)$ является решением уравнения Лагранжа. Если $a(p) = p$ для всех, то уравнение Лагранжа имеет вид.

$$y = y'x + b(y') \quad (47)$$

Это уравнение называется уравнением Клеро. В этом случае уравнение (45) имеет следующий вид

$$[x + b'(p)]dp = 0 \quad (48)$$

Отсюда мы имеем либо $dp = 0$ либо $x = -b'(p)$. Если $dp = 0$, то $p = C$ и функция $y = Cx + b(C)$ является решением уравнения Клеро. Если $x = -b'(p)$, то параметрические решения задаются уравнениями $x = -b'(p)$, $y = pb'(p) + b(p)$.

Рекомендуемая литература

1. Бухарова Т.И. и др. Курс лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: НИЯУ МИФИ, 2011.
2. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М., 2004.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., 2004.

Ташкентский филиал Российского Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". Июнь 2022