**Предмет: Аналитическая геометрия и линейная алгебра**

**Лекция №6**

**Некоторые задачи аналитической геометрии в пространстве и на плоскости**

*Аннотация*

*В данной лекции рассматриваются основные задачи аналитической геометрии. В частности, выводится формула нахождения расстояния между двумя точками, площадь треугольника, объем тетраэдра, деления отрезка в данном отношении, приводится вычисление двойного векторного произведения и в конце лекции приведены примеры.*

***Базовые фразы****: расстояние между двумя точками, объем тетраэдра, площадь треугольника, деление отрезка в данном отношении, двойное векторное произведение.*

План

1. Расстояние между двумя точками
2. Объем тетраэдра
3. Площадь треугольника
4. Деление отрезка в данном отношении
5. Двойное векторное произведение

**1.Расстояние между двумя точками**

Пусть в пространстве  ( – фиксировано, ) задана декартовая прямоугольная система координат.

Рассмотрим в пространтсве   (в случаях  и  задача решается ана­логично) две точки и. Тогда расстояние  между ними равно длине соединяющего их вектора

.

Поэтому согласно формулы нахождения длины вектора .

На плоскости  расстояние между точками и определяется равенством

.

На прямой  расстояние между точками и определяется равенством

.

***2. Площадь треугольника***

Пусть на плоскости задана декартовая прямоугольная система координат *OXY* и в этой системе координат заданы три точки ,  и . Требуется найти площадь треугольника с вершинами в точках  и . Для решения этой задачи рассмотрим на плоскости два вектора  и . В пространстве  векторное произведение не определено. Но ничто не мешает считать, что наша плоскость  помещена в пространство  и третий базисный вектор выбран перпендикулярно плоскости и имеет единичную длину. Тогда площадь треугольника



**3.** ***Объем тетраэдра***

Поставим задачу: вычислить объем тетраэдра, построенного на приведенных к общему началу векторах , заданных в некотором ОНБ своими координатами , , . Объем параллелепипеда, построенного на векторах  равен ушестеренному объему тетраэдра. Поэтому объём тетраэдра

.

***4. Деление отрезка в данном отношении***

Рассмотрим так называемую задачу о делении отрезка в данном отношении.

Пусть в пространстве  (*m* – фиксировано, *m* = 1, 2, 3) задана декартовая прямоугольная система координат и две точки и. Условимся называть величиной направленного отрезка  некоторой оси число, равное его длине, взятой со знаком плюс, если направление этого отрезка совпадает с направлением оси, и со знаком минус, если оно противоположно направлению оси. Величину направленного отрезка  будем обозначать  (очевидно, .

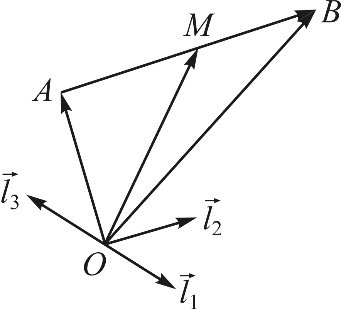


Рис. 6.1

Пусть на некоторой оси *l* задан направленный отрезок  и точка , принадлежащая этой оси (), тогда число , определяемое равенством , где  и  – величины направленных отрезков  и  оси *l*, называется отношением, в котором точка  делит направленный отрезок . При этом, если точка *M* лежитна отрезке  то число . В то же время соотношение  характеризует точки , лежащие вне отрезка *,* для точек  предшествующих точке  (в ориентации, в которой ), имеют место неравенства, а для точек , следующих за точкой *В*, – неравенства .

При приближении точки *М* к точке *В* по отрезку  (т.е. так, что все время ) отношение  стремится к , а при приблежении точки  к точке  с другой стороны отношение  стремится к . Можно поэтому условно говорить, что точка *В* делит отрезок  в отношении .

При  отношение  равно нулю.

Задача аналитической геометрии о делении отрезка в данном отношении состоит в следующем: считая известными координаты двух точек  и  и отношение λ, в котором некоторая (неизвестная) точка  делит отрезок , найти координаты точки *M* (рис. 6.1). Решим задачу в   (в  и  задача решается ана­логично).

Пусть координаты точек  равны соответственно  и  Координаты неизвестной точки *M* обозначим через . Так как , то .

Следовательно,  или, , .

По определению, для середины отрезка *АВ* мы имеем . Поэтому середина  отрезка с концами и имеет координаты

, *k=* 1, 2, 3.

***5. Двойное векторное произведение***

Пусть  – векторы из . Если вектор  векторно умножается на вектор , а вектор  также векторно умножается на векторное произведение , то получающийся при этом вектор  называется двойным векторным произведением.

***Утверждение 1.5.*** Двойное векторное произведение равно среднему вектору, умноженному на скалярное произведение двух остальных, минус другой вектор внутреннего произведения, умноженный на скалярное произведение двух остальных, т.е.

.

**Доказательство**. Введем специальную декартову прямоугольную систему координат. Ось *OZ* направим по вектору , а ось  поместим в плоскости векторов  и  (считаем, что векторы  приведены к общему началу). В таком случае будем иметь:

.

Теперь находим:

;

 (1.21)

С другой стороны,

; 

; .

Следовательно,

. (1.22)

Сравнивая правые части формул (1.21) и (1.22), получаем

. #

***Задачи***

1. Доказать, что все внутренние углы треугольника с вершинами ,  и  острые.
2. На оси *Оу* найти точку, равноудаленную от двух точек  и .
3. Даны четыре точки 

. Найти центр и радиус сферы, проходящей через эти точки.

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма  Найти:

1) четвертую вершину;

2) точку пересечения диагоналей;

3) угол при вершине *В;*

4) длину диагонали *АС;*

5) площадь параллелограмма.

4. Отрезок *АВ* разделен на пять равных частей; известна первая точка деления  и последняя *F(* — 2, 4, — 8). Определить координаты концов отрезка и остальных точек деления.

1. Площадь треугольника , две его вершины суть точки  и , а третья вершина *C* лежит на оси *Ox.* Определить координаты вершины *C.*
2. Даны векторы  . Найти: 1) ; 2) ; 3) .
3. Доказать тождества:
4. ;
5. 

**Вопросы для самоконтроля**

1. Перечислите основные задачи аналитической геометрии.
2. Вывести формулы для нахождения расстояния между двумя точками в пространстве (на плоскости, на прямой).
3. Докажите, что объем параллелепипеда, построенного на векторах  равен ушестеренному объему тетраэдра.
4. Вывести формулу для вычисления площади треугольника.
5. Опишите задачу деление отрезка в данном отношении.
6. Когда отношение деление отрезка будет принимать положительные значение?
7. Когда отношение деление отрезка будет принимать отрицательные значение?
8. Вывести формулы для вычисления двойного векторного произведения.

**Литература**

1. Ильин В.А, Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: Учебник для вузов. 7-е изд., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. -224с.
2. Сандаков Е.Б. Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Учебное пособие, М.: МИФИ, 2005. – 308 с.
3. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: 1964 г., 440 с.