**Волновое уравнение**

**1. Формула Кирхгофа.** Рассмотрим волновое уравнение

 (1)

и будем искать его решение, удовлетворяющее начальным условиям

. (2)

Мы будем предполагать, что  непрерывна вместе со своими производными до третьего порядка, а  до второго порядка включительно во всем пространстве.

Покажем сначала, что интеграл

, (3)

взятый по поверхности сферы  радиуса  с центром в точке , является решением волнового уравнения (1), здесь  – произвольная функция.

Заметим, что координаты точек сферы  могут быть выражены по формулам

,

где  – направляющие косинусы радиусов сферы . Мы их можем записать в виде



где угол  меняется от  до  и угол  от  до . Когда точка  описывает сферу , точка  описывает сферу  радиуса, равного единице, с центром в начале координат, а между соответствующими элементами площади  и  обеих сфер имеется соотношение

.

Тогда интеграл (3) приводится к виду

. (4)

Отсюда легко заметить, что функция  имеет непрерывные производные до того порядка, если функция  непрерывна вместе со своими производными до  го порядка .

Из формулы (4) находим



или, возвращаясь к первоначальной области интегрирования

. (5)

Дифференцируя теперь выражение (4) по , получим



. (6)

Чтобы вычислить , перепишем (6) в виде



и, применяя формулу Остроградского, получим

,

где  – шар радиуса  с центром в точке . Полагая



будем иметь

.

Дифференцируя это выражение по , получим

. (7)

Нетрудно видеть, что

. (8)

В самом деле, переходя в интеграле  к сферическим координатам  с центром в точке , имеем



Дифференцируя по , получим



.

Сравнивая равенства (5), (7) и (8), мы видим, что функция , определяемая формулой (3), удовлетворяет волновому уравнению (1), какова бы ни была функция , имеющая непрерывные производные до второго порядка. Из формул (4) и (6) непосредственно следует, что функция  удовлетворяет начальным условиям

. (9)

Если  есть решение волнового уравнения (1) с начальными данными (9), то легко видеть, что функция



будет также решением уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям

 (10)

Взяв теперь за  в случае начальных условий (9) функцию , а в случае начальных условий (10) функцию  и сложив построенные таким образом решения, будем иметь решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2).

Таким образом, решение волнового уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2), запишется в виде

 (11)

Эта формула называется формулой Кирхгофа.

Чтобы более ясно представить себе физическую картину распространения волн в трехмерном пространстве, описываемую формулой Кирхгофа (11), положим, что начальное возмущение сосредоточено в некоторой ограниченной области  с границей , т.е. что функции  и  равны нулю вне области .

Пусть точка  находится вне области . Обозначим через  и  соответственно наименьшее и наибольшее расстояния от  до точек поверхности . При  сфера  находится вне , обе функции  и  равны нулю на сфере  и из формулы (11) имеем , т.е. начальные возмущения ещё не успеем дойти до точки . В момент  сфера  коснётся поверхности  и передний фронт волны пройдет через точку . Начиная с момента времени  до момента времени , сфера  будет пересекать область  и формула (11) даёт . Наконец, при  сфера  не будет иметь общих точек с поверхностью  (вся область  будет лежать внутри сферы ) и из формулы (11) будем иметь , т.е. начальные возмущения уже прошли через точку . Моменту  соответствует прохождение заднего фронта волны через точку . Передний фронт волна в заданный момент времени  представляет собою поверхность, отделяющую точки, которые еще не начали колебаться, от точек, которые уже колеблются. Из предыдущего вытекает, что все точки этой поверхности имеют кратчайшее расстояние от , равное . Передний фронт волны есть огибающая для семейств сфер, имеющих центры на поверхности  и радиус . Задний фронт волны в заданный момент  представляет собою поверхностью, отделяющую точку, которые еще колеблются, от точек, в которых колебание прекратилось. Постоянная  является скоростью распространения фронта волны.

Таким образом, начальное возмущение, локализованное в пространстве, вызывает в каждой точке  пространства действие, локализованное во времени, при этом имеет место распространение волны с передним и задним фронтом волн (принцип Гюйгенса).

**2. Цилиндрические волны.** Рассмотрим частный случай, когда функции  и  зависят только от  и , т.е. сохраняют постоянное значение на всякой прямой, параллельной оси . Если передвигать точку  параллельно оси , то, очевидно, правая часть формулы Кирхгофа (11) не будет менять своего значения, т.е. функция  также не будет зависеть от , и формула (11) даёт решение уравнения

 (12)

при начальных условиях

. (13)

Мы можем рассматривать решение (11), оставаясь исключительно на плоскости . Для этого надо интегралы формулы (7,1,11) которые берутся по сферам, преобразовать в интегралы по кругам на плоскости . Возьмём точку  на плоскости . Точки с координатами , определяемые по формулам



при , суть переменные точки сферы  с центром  и радиусом . Части этой сферы находящиеся над и под плоскостью , проектируются на плоскость  в виде круга  с центром  и радиусом . Известно, что

,

где  направление нормали к , т.е. радиуса этой сферы, образующей острой угол с осью . Если – переменная точка сферы, – ее проекция на плоскость , то

,

где  – координаты переменной точки круга .

В результате преобразования формулы (11) мы получим



 (14)

Эта формула даёт решение волнового уравнения (12) удовлетворяющее начальным данным (13). *Формула (14) называется формулой Пуассона.*

Положим, что начальное возмущение ограничивается некоторой конечной областью  на плоскости  с контуром , т.е.  и  равны нулю вне . Пусть точка  лежит вне области . Для моментов времени , где – наименьшее расстояние от  до контура , круг  не имеет общих точек с областью , функции  и равны нулю во всем круге  и формула (14) даёт  – до точки  возмущение еще не дошло. В момент  в точку  придёт передний фронт волны. Для значений , где  – наибольшее расстояние от  до контура , круг  будет содержать внутри себя всю область  и мы получим



 . (15)

В случае, после момента времени  функция  не обращает нуль, как в случае трёхмерного пространства. Но ввиду присутствия  в знаменателе мы может утверждать, что  при . Таким образом, начальное возмущение, локализованное на плоскости, не локализовано во времени. В этом случае возникает волна, которая имеет передний фронт волны, но не имеет заднего фронта (принцип Гюйгенса не имеет места). В трехмерном пространстве уравнению (12) соответствуют так называемые *цилиндрические волны.*

**3. Непрерывная зависимость решения от начальных данных.** Все выведенные формулы, дающие решения задачи Коши для волнового уравнения, содержат интегралы от начальных функций, умноженных на определённые функции, и производные по времени от таких интегралов. Поэтому если изменить начальные функции  и  так, чтобы при этом они сами и их первые производные достаточно изменились, то при этом мало изменится и функция , дающая решение задачи Коши, т.е. имеем непрерывную зависимость решения от начальных данных. При этом предполагается, конечно, что рассматриваются только ограниченные значения , если область, на которой задаются начальные функции, бесконечна.

**4. Теорема единственности.** Докажем единственность решения задачи Коши для волнового уравнения. Для простоты письма будем считать , чего можно достигнуть, заменяя в волновом уравнении  на .

Для определённости рассмотрим случай трёх независимых переменных:

 (16)

 (17)

Покажем, что задачи Коши (16), (17) имеет единственное решение в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций. Предположим, что  и  удовлетворяют уравнению (16) и начальным данным (17). Тогда разность  будет удовлетворять волновому уравнению (16) и нулевым начальным данным

. (18)

Покажем, что  при любых значениях  и любом . Рассмотрим трёхмерное пространство  и возьмём произвольную точку , причем . Из этой точки как вершины, проведём конус



до пересечения с плоскостью .

Этот конус будем называть характеристическим конусом. Пусть  – область, ограниченная боковой поверхностью характеристического конуса и частью плоскости , находящейся внутри конуса ( – конус).

Нетрудно проверить следующее тождество:



.

Проинтегрируем это тождество по области . Интеграл от левой части равен нулю, так как  является решением уравнения (16):



.

Преобразуем этот интеграл по поверхности области , пользуясь формулой Остроградского. Обозначим через  боковую поверхность конуса, а через  – его основание. Так как на  – в силу начальных данных (18) , то остаётся только один интеграл по :



. (19)

На боковой поверхности  характеристического конуса

.

Равенство (19) можно теперь переписать в виде



. (20)

На поверхности :  , и так как подынтегральная функция непрерывна и неотрицательна, то из (20) следует, что она на поверхности конуса равна нулю, т.е.

 на 

или

 (21)

Обозначим через  направление какой-нибудь образующей характеристического конуса, тогда, воспользовавшись равенствами (21), получим





,

так как образующая конуса всегда составляет прямой угол с нормалью к его поверхности. Итак, вдоль образующей : . В точке, где образующая конуса пересекает плоскость , значение . Поэтому  вдоль образующей конуса. В частности, это выполняется и в вершине конуса в точке : , что и требовалось доказать. Это утверждение сохраняет свою силу, если однородные начальные условия (18) имеют место не на всей плоскости , а лишь на основании  области .

Отсюда можно заключить, что значение решения волнового уравнения (7.4.1) в точке  зависит от значений начальных данных только на той части плоскости , которая вырезается на плоскости  характеристическим конусом с вершиной .

**5. Неоднородное волновое уравнение.** Рассмотрим уравнение

 (22)

и будем искать его решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям

. (23)

Добавляя к этому решению решение однородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (2), получим решение уравнения (22), удовлетворяющее условиям (2).

Для решения задачи (22), (23) рассмотрим однородное уравнение

, (24)

удовлетворяющее начальным условиям

, (25)

причем за начальный момент времени взято не , а , где  – некоторый параметр. Решение задачи (24), (25) будет выражаться формулой Кирхгофа, но только в этой формуле нужно заменить  на , поскольку начальным моментом времени является не , а .

Итак, мы имеем



. (26)

Покажем, что функция , определённая формулой

 (27)

является решением неоднородного волнового уравнения (22) при нулевых начальных данных (23).

Действительно, из формулы (27) находим

. (28)

Дифференцируя выражение (27) по , получим

 . (29)

Здесь вне интегральный член равен нулю в силу первого из условий (25). Дифференцируя еще раз по , будем иметь

,

причем вне интегральный член равен  в силу второго из условий (25), т.е

. (30)

Из формул (28), (30) и уравнения (24) непосредственно вытекает, что функция , определённая формулой (27), удовлетворяет неоднородному уравнению (22).

Начальные условия (23) также выполнены, что следует из формул (27) и (29).

Подставляя теперь в формулу (27) вместо функции ее выражение (26), получим



.

Введём вместо  новую переменную интегрирования . Тогда будем иметь



. Вводя вместо сферических прямоугольных координаты



и принимая во внимание, что , получим

,

и выражение для  окончательно запишется в виде

, (31)

где  – шар радиуса  с центром в точке .

Выражение (31) называется *запаздывающим потенциалом*.

Отметим, что при выполнении интегрирования функция  берётся не в рассматриваемый момент времени , а в момент времени , предшествующий моменту  на такой промежуток времени, какой потребуется процессу, распространяющемуся со скоростью , для прохождения пути от точки  до точки .

Совершенно так же, как и выше, мы можем получить решение неоднородного волнового уравнения

, (32)

удовлетворяющее начальным данным

. (33)

Это решение имеет следующий вид:

, (34)

где .

В случае уравнения

, (35)

решение, удовлетворяющее нулевым начальным данным, будет

. (36)

**6. Точечный источник.** Если мы положим, что свободный член в уравнении (22) отличен от нуля только в небольшой сфере с центром в начале координат, то при стремлении радиуса этой сферы к нулю и при беспредельном возрастании интенсивности внешней силы мы в пределе можем получить решение волнового уравнения при наличии точечного источника, который начинает действовать с момента  и закон воздействия которого может быть любым в зависимости от времени. Положим, что

 при ,  (37)

и

, (38)

где  шар с центром в начале и радиуса .

Обратимся к формуле (31) и будем считать . В силу (37) достаточно произвести интегрирование по шару . При  величина  будет равна расстоянию от точки  до начала координат, т.е. , и мы получим, принимая во внимание (38),

 (39)

При  ясно, что , так как при  область интегрирования в интеграле (31) не содержит внутри себя шара  при достаточно малых . Отметим, что функция (39) при любом выборе функции  удовлетворяет однородному волновому уравнению (1) и предоставляет собой сферическую волну, расходящуюся радиально со скоростью  от начала координат.

В случае уравнения (32) мы должны совершенно также, как и выше считать

 при  (40)

и

, (41)

где  круг с центром в начале радиуса . Обращаясь к формуле (34) и переходя к пределу при , получим решение для точечного источника в случае цилиндрических волн:

 при , (42)

и

 при ,  . (43)

Отметим, что воздействие точечного источника на точку  в момент времени  зависеть только от интенсивности источника в момент времени . В случае же формулы (40) это воздействие определяется действием точечного источника за промежуток времени от  до момента .