**Смешанная задача для уравнения гиперболического типа.**

Рассмотрим следующую смешанную задачу для уравнения гиперболического типа:

, , (1)

где 

;

; (2)

. (3)

Предполагаем, что функции  удовлетворяют условиям:

, , , , , ,  и  – кусочно–непрерывны на , , , , .  – ограниченная область и ее граница  – кусочно–гладкая поверхность,  – та часть , где  и  одновременно.

**1. Классическое решение. Интеграл энергии.** Классическим решением смешанной задачи (1)–(2)–(3) называется функция  класса , удовлетворяющая уравнению (1) в цилиндре , начальным условиям (2) на нижнем основании и граничному условию (3) на боковой поверхности этого цилиндра.

Необходымыми условиями существования классического решения задачи (1)–(2)–(3) являются следующие условия гладкости:

, , 

и условие согласованности

.

При изучении краевых задач для гиперболических уравнений весьма эффективным оказывается метод интегралов энергии. Пусть  – классическое решение задачи (1)–(2)–(3). Интегралом энергии называется величина



,

представляющая собой сумму кинетической и потенциальной энергии колеблющейся системы в момент времени .

***Теорема 1.*** *Пусть  – классическое решение задачи (1)–(2)–(3) и . Тогда справедливо соотношение*

*, (4)*

*где*

**

*.*

Для доказательства возьмём произвольное число  и область  с кусочно-гладкой границей .

Умножая уравнение (1) на , интегрируя по цилиндру  и пользуясь первой формулой Грина

(Если  и , то справедлива первая формула Грина:

.

Если , то справедлива вторая формула Грина:

.),

S

G

S’

G’



получим









.

Переходя здесь к пределу при  и  и пользуясь тем, что  и , получаем равенство



. (5)

Из граничного условия (3) вытекают соотношения на :

, если ; , если .

Поэтому

,

откуда и из (5) заменяя  на , получаем формулу (4). Теорема 1 доказана.

**Следствие 1.** При  равенство (4) принимает вид

. (6)

Физический смысл равенства (6) состоит в том, что полная энергия колеблющейся системы при отсутствии внешних возмущений не меняется со временем (*закон сохранения энергии*).

**2. Единственность и непрерывная зависимость классического решения.** Применим метод интеграла энергии для доказательства единственности и непрерывной зависимости классического решения смешанной задачи (1)–(2)–(3).

Дифференцируя равенство (4) по , получим

. (7)

Применяя к правой части равенства (7) неравенство Коши–Буняковского, выводим неравенство

. (8)

Учитывая теперь, что  и, стало быть,  при некотором , получаем цепочку неравенств

,

т.е.

. (9)

Аналогично убеждаемся в справедливости оценки

, (10)

где .

Подставляя неравенство (9) в неравенство (8) и сокращая на , выводим неравенство

.

Интегрируя полученное дифференциальное неравенство, для функции  получаем оценку

 (11)

Из оценок (9), (10) и (11) выводим оценки

; (12)

. (13)

Теперь оценим функцию . Дифференцируя равенство



по , пользуясь неравенством Коши–Буняковского и учитывая неравенство (12), получаем

,

т.е., после сокращения на ,

.

Интегрируя это дифференциальное неравенство, имеем

,

где  – значение функции  в точке , т.е.

.

Меняя порядок интегрирования в последнем интеграле, получим искомую оценку

. (14)

Теперь, пользуясь оценками (12), (13) и (14), докажем следующую теорему.

***Теорема 2.*** *Классическое решение задачи (1)–(2)–(3) единственно и непрерывно зависит от  и  в том смысле, что если  и*

* (15)*

*то соответствующие (классические) решения  и  удовлетворяют при  неравенствам*

*, (16)*

*, (17)*

*, (18)*

*причем число  не зависит от  и .*

**Доказательство.** Для доказательства единственности достаточно установить, что классическое решение  однородной задачи (1)–(2)–(3) (при  и ) единственно, т.е. . Но это вытекает из неравенства (14), поскольку

 и .

Для доказательства непрерывной зависимости составим разность . Функция  является классическим решением задачи (1)–(2)–(3) с заменой  и  на  и  соответственно. Пользуясь неравенствами (15), для решения  оценим величину интеграла энергии :





,

где  – объем области ,  – площадь куска  и  – число большее, чем  и . Таким образом получена оценка

. (19)

Применяя теперь к решению  неравенство (14),

,

и пользуясь неравенствами (15) и (19), получим при всех  оценку (16):







при надлежащем выборе постоянной . Аналогично, с помощью неравенств (12), (13) и (19) устанавливается и неравенства (17) и (18). Теорема 2 доказана.