**Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона.**

Функция  из класса  называется классическим решением задачи Коши для уравнения

, , (1)

если в  она удовлетворяет уравнению (1), а при  – начальному условию

, . (2)

Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности

, (3)

. (4)

Будем предполагать, что все выполняемые ниже действия законны, и в этом предположении выведем формулу для решения задачи Коши (3) – (4). Обе части уравнения (3) подвергнем преобразованию Фурье по ­

.

(5)

Интегрирование по  и дифференцирование по  независимы, поэтому вынесем в первом слагаемом дифференцирование по  за знак интеграла:



,

здесь  означает преобразование Фурье функции , т.е.

.

Каждый интеграл во втором слагаемом в (5) возьмем по частям



. (6)

Уравнение (5) принимает вид

. (7)

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с независимой переменной ; координаты  играют роль параметров. Интегрируя уравнение (7), получаем

.

Полагая здесь , найдем . Таким образом, функция  есть преобразование Фурье начального значения функции . Но  следовательно,



и

.

Воспользуемся формулой обращения интеграла Фурье

.

Заменим здесь  его выражением и изменим порядок интегрирования:

. (8)

Вычислим внутренний интеграл в формуле (8):



. (9)

В интеграле справа  – вещественная переменная, которая меняется в пределах .

Выделим –й множитель в произведении (9). Обозначим для краткости . Дело сводится к вычислению интеграла

.

Рассмотрим плоскость комплексной переменной . Для определённости примем, что . Построим прямоугольник с контуром , как на рисунке 1.



По теореме Коши  или, в более подробной записи,



.

Пусть теперь . При этом второй и четвёртый интегралы стремятся к нулю. Действительно,



при . Отсюда следует, что

.

Легко видеть, что случай  приводит к тому же результату. Замена  дает, далее

.

Теперь

,

и интеграл (9) оказывается равным величине

.

Подставив этот результат в формуле (8), получим формулу Пуассона:

. (10)

Перейдём теперь к решению неоднородного уравнения

,  (11)

при нулевом начальном условии

. (12)

Рассмотрим интеграл Дюамеля

, (13)

где при 

 (14)

и, как доказано выше, при 

, .

Докажем, что этот интеграл (13) дает решение задачи (11)–(12).

Легко видеть, что . Далее имеем

, .

Так как , то



.

Следовательно,

.

Для неоднородной задачи Коши

, , (15)

,  (16)

решение записывается в виде



 (17)

называемой формулой Пуассона.

Докажем единственность решения задачи Коши:

, , (18)

, , (19)

предполагая, что решение  ограничено во всей области, т.е. существует такое число , что  для всех  и при любом . Кроме того,  – непрерывная и ограниченная функция.

Пусть  и  – два решения уравнения (18), удовлетворяющие одному и тому же начальному условию (19). Тогда разность  будет удовлетворять уравнению (18) и начальному условию . Кроме того,  ограничено во всей области

.

Теорему о максимуме и минимуме для неограниченной области непосредственно применить нельзя, так как функция  может нигде не достигать наибольшего и наименьшего значений. Чтобы воспользоваться этой теоремой, рассмотрим конечную область

, . (20)

Возьмём функцию

,

которая является решением уравнения теплопроводности (18). Легко видеть, что

, .

Применяя теорему о максимуме и минимуме к разности между функциями  и  в области (20), будем иметь

, .

Откуда



или

.

Фиксируя некоторое значение  и выбирая  достаточно большим, получим

,

откуда ввиду произвольности  и точки  следует, что

.

Справедлива следующая

**Теорема (теорема А.Н. Тихонова).** Пусть функция  непрерывна в полосе , удовлетворяет в открытой полосе  уравнению теплопроводности

,

и оценке

. (21)

Тогда если , то  во всей рассматриваемой полосе.

**Доказательство.** Рассмотрим сопряжённую задачу Коши



где . Выпишем решение этой задачи с помощью интеграла Пуассона:

,

где .

Ввиду финитности функции  это решение при , где , удовлетворяет оценке

,

где  и  достаточно велико.

Такая же оценка верна и для любой производной , где  – есть ()-мерный мультииндекс. Пусть  выбрано столь малым, что , т.е. . Тогда интеграл



имеет смысл и равномерно сходится при . Интегралы, полученные заменой  или  на их производные по  или  также равномерно сходятся при , где число  произвольно. Поэтому функция  непрерывна при , обращается в  при  и при  имеет производную



.

Последний интеграл равен нулю, так как его можно по формуле Грина записать в виде

,

поскольку  и  экспоненциально стремятся к  при . Таким образом, .

Теперь проверим, что



(правая часть на самом деле равна ). Имеем:



,

поскольку рассуждения, проводившиеся нами при рассмотрении интеграла Пуассона, показывают, что



равномерно на любом компакте в .

Итак, ясно, что

,

если . Поэтому  при .

Но теперь мы можем перейти к заданию начальных данных при  и доказать, что  уже при  и т.д. В итоге получаем:  во всей полосе, что и требовалось. Теорема доказана.

Итак, в классе функций, удовлетворяющих оценке (21), решение задачи Коши для уравнения теплопроводности единственно.

**Обоснование формулы Пуассона.**

Обоснование формулы Пуассона для простоты проведём в предположении, что уравнение теплопроводности – однородное.

а) Докажем прежде всего, что формула Пуассона определяет функцию, непрерывную при .

Рассмотрим область, определённую неравенствами

, , (22)

где  и  – положительные постоянные. Докажем, что входящий в формулу Пуассона интеграл

 (23)

сходится равномерно по  и  в области (22). Возьмём достаточно большое число  и оценим интеграл

.

Функция  ограничена; пусть . Далее . Будем считать, что . Тогда  и . Теперь  и, следовательно

. (24)

Интеграл  сходится, поэтому интеграл справа в (24) сколь угодно мал при  достаточно большом; так как он не зависит ни от , ни от , то интеграл (23) сходится равномерно. Отсюда следует, что функция, определяемая формулой Пуассона, непрерывна при .

б) Докажем, что при  функция  бесконечно дифференцируема по  и по координатам точки  и что все производные можно получить, дифференцируя формулу Пуассона под знаком интеграла.

Рассмотрим, например, производную . Если формально продифференцировать по  правую часть формулы Пуассона, то получится выражение

. (25)

Как мы видели, первый интеграл сходится равномерно в области (22). Точно так же проверяется, что в той же области равномерно сходится и второй интеграл. Отсюда, как обычно, следует, что производная существует, непрерывна и совпадает с выражением (25). Существование остальных производных устанавливается аналогично.

в) Непосредственным дифференцированием доказывается что функция, определяемая формулой Пуассона, удовлетворяет уравнению теплопроводности.

г) Остаётся доказать, что функция  ограничена и удовлетворяет начальному условию (19)

.

Сделаем замену , тогда формула Пуассона примет вид

. (26)

По формуле  легко находим

. (27)

Теперь из формулы (26) следует, что

,

и функция  ограничена. Далее по (26) и (27)

. (28)

Интеграл в формуле (28) разобьём на два интеграла, взятые по областям  и , где  – некоторая постоянная.

Имеем



.

Интеграл  сходится, и можно выбрать , что при  будет

.

Зафиксируем какое–нибудь . Тогда можно найти такое , чтобы при  и для любого  было

.

Теперь



и окончательно

, .

Этим завершено обоснование формулы Пуассона.

В заключение параграфа скажем о корректности задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности; распространение результатов на неоднородное уравнение не представляет затруднений. За  примем пространство функций, непрерывных и ограниченных в , с нормой

. (29)

За  примем пространство функций, непрерывных и ограниченных в , с нормой

. (30)

Если , то решение задачи  в пространстве  существует и единственно. Это означает, что оператор , который переводит начальную функцию  в решение, существует и определён на всем пространстве  . Далее, из формулы Пуассона, записанной в виде (26)

,

следует

.

Это неравенство не нарушится, если заменить в нем левую часть ее верхней гранью: , и, следовательно, . Таким образом, задача Коши для уравнения теплопроводности корректна в паре пространств , в которых нормы заданы формулами (30) и (29).

**Бесконечная скорость теплопередачи**

Из формулы Пуассона вытекает, что тепло распространяется с бесконечной скоростью. Действительно, представим себе, что теплопередающая среда заполняет все пространство . Пусть в начальный момент вся среда, кроме некоторой конечной области , имеет нулевую температуру (  ), а точки области  нагреты до некоторой температуры . В любой точке  и в любой момент времени  температура среды  определяется формулой Пуассона

 (31)

интеграл по  исчезает, потому что в этой области . Из формулы (31) ясно, что . Таким образом, как бы ни было мало  и как бы ни была далека точка  от области , тепло из этой области за промежуток времени  успевает дойти до точки . Это и означает, что тепло распространяется с бесконечной скоростью. Этот физически противоречивый вывод на практике осложнений не доставляет. Если  велик, а  мало, то в формуле (31) отрицательный показатель велик по абсолютной величине, и значение температуры  пренебрежимо мало. Практически, следовательно, формула Пуассона дает (с точностью до пренебрежимо малых величин) некоторую конечную скорость распространения тепла.