**УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.**

**Смешанная задача для уравнения параболического типа**

Пусть

, (1)

где



 ***Определение 1.*** *Если для фиксированной точки  можно найти такое аффинное преобразование переменных*

*,*

*в результате которого полученная из  форма содержит лишь , переменных , то говорят, что уравнение*

**

 *в точке  параболические вырождается.*

При  уравнение

 (2)

называется параболическим в точке , если оно в новых координатах

,

где  – ортогональная матрица, приводящая матрицу  к диагональному виду ,

приобретает в точке  вид

 (3)

в котором одно из  (пусть ) равно нулю, остальные  имеют одинаковые знаки и . Если коэффициенты уравнения (2) – гладкие функции и уравнение (2) параболично в области, то в окрестности любой точки этой области его можно невырожденной заменой переменных привести к виду

 , (4)

причём форма  будет положительно определённой.

Более того, нам удобнее начать изучение параболических уравнений с уравнений вида

, , (5)

где 

;

; (6)

. (7)

Предполагаем, что функции  удовлетворяют условиям:

, , , , , ,  и  – кусочно–непрерывны на , , , , .  – ограниченная область и ее граница  – кусочно–гладкая поверхность,  – та часть , где  и  одновременно.

 Для уравнений (5) основными являются

 1) Задача Коши, в которой ищется функция  удовлетворяющая при  и  уравнению (5), а при  – начальному условию

  (8)

 2) Смешанная задача (5)–(6)–(7).

При  и  называется смешанной задачи I рода.

При  и  называется соответственно II рода.

При  и  называется III рода.

 **1. Классическое решение. Принцип максимума.**

***Определение 2.*** *Классическим решением смешанной задачи (5)–(6)–(7) называется функция , , удовлетворяющая уравнению (5) в цилиндре , начальному условию (6) и граничному условию (7).*

 Необходымыми условиями существования классического решения задачи (5)–(6)–(7) являются следующие условия гладкости:

, ,  кусочно-непрерывна

 на , и условие согласованности

.

 При изучении краевых задач для уравнения параболического типа весьма полезным является следующий.

***Принцип максимума.*** *Пусть функция  класса  удовлетворяет уравнению (5) в . Тогда, если  в цилиндре , то либо  на , либо функция  принимает свой (положительный) максимум на цилиндре  на нижнем основании  или на боковой поверхности  его, т.е.*

*. (9)*

 **Доказательство.** Предположим противное, т.е. пусть функция  принимает положительные значения в некоторых точках цилиндра , но не достигает своего (положительного) максимума ни на его нижнем основании , ни на боковой поверхности . Это значит, что найдётся точка , такая, что

. (10)

Обозначив

 , (11)

построим функцию

.

Тогда



и в силу (11), при всех  из  или  имеем

.

 Отсюда следует, что функция  также принимает своё (положительное) максимальное значение на  в некоторой точке , причём

 . (12)

Выпишем необходимые условия максимума функции  в точке :

.

Из этих условий, а также из неравенства (12) вытекает, что в этой точке





,

что противоречит уравнению (5). Это значит, что неравенство (10) неверна и следовательно, справедливо противоположное неравенство (9), что и требовалось установить.

Заменяя  на  и  на  из принципа максимума получим

***Принцип минимума.*** *Если функция  класса  удовлетворяет уравнению (5) в и  в цилиндре , то справедливо неравенство*

*. (9’)*

 **2. Единственность и непрерывная зависимость классического решения.** Применим принцип максимума и минимума для установления единственности и непрерывной зависимости классического решения смешанной задачи (5)–(6)–(7) I рода, т.е., когда в граничном условии  и :

. (7’)

 (В этом случае, требование  для краевых задач I рода излишне).

Пусть  – классическое решение задачи (5)–(6)–(7’) и . Фиксируем  и обозначим

.

Составим функцию

. (13)

 Функция  является классическим решением смешанной задачи (5)–(6)–(7’) с заменой  и  на  и  соответственно.

 Учитывая, что

 ;

,

пользуясь неравенством (9), получаем оценку



т.е., в силу (13)

 .

Аналогично, вводя функцию

 

и пользуясь неравенством (9’), получим противоположную оценку:

.

Итак, если  – классическое решение задачи (5)–(6)–(7’) и , то при любом  справедлива оценка

 (14)

Пользуясь полученной оценкой, докажем следующую теорему.

 **Теорема.** Классическое решение задачи (5)–(6)–(7’) единственно и непрерывно зависит от  и  в том смысле, что

 (15)

то соответствующие (классические) решения  и  удовлетворяют неравенству

 (16)

**Доказательство.** Единственность решение вытекает из того, что в силу оценки (14), однородная задача (5)–(6)–(7’)(при  и ) имеет только нулевое классическое решение.

Для доказательства непрерывной зависимости составим разность . Функция  является классическим решением задачи (5)–(6)–(7’) с заменой , ,  на , ,  соответственно. Применяя неравенство (14) к функции  и пользуясь оценкой (15) получим оценку (16). Теорема доказана.

 **3. Решение смешанной задачи методом разделения переменных (Метод Фурье).** Рассмотрим в цилиндре  смешанную задачу для уравнения параболического типа

, , (5)

где 

;

; (6)

. (7’’)

где .

Для построения формального решения смешанной задачи (5)–(6)–(7’’) используем метод Фурье

 . (17)

Для функций  получим задачу Коши:

  , (18)

 где

 , (19)

. (20)

Решая задачу Коши (18), получим

  (21)

и следовательно, формальное решение задачи (5)–(6)–(7’’) выражается рядом

. (22)

При исследование смешанной задачи (5)–(6)–(7’’) введём в пространстве  скалярное произведение

.

Обобщённым решением смешанной задачи (5)–(6)–(7’’) из назовём функцию  принадлежащую  и удовлетворяющую интегральному тождеству





при произвольной , равном нулю при .

 Если смешанная задача (5)–(6)–(7’’) имеет обобщенное решение, то оно представляется рядом (22). Из формулы (22) вытекает, в частности, единственность слабого решения смешанной задачи.

 **4. Обоснование метода Фурье.** Докажем, что ряд (22) действительно дает слабое решение задачи (5)–(6)–(7’’). Положим . Доказательство сводится к проверке следующих утверждений:

 а) Ряд (22) сходится в метрике  равномерно по  на любом сегменте ;

 б) Ряд (22) сходится в метрике  равномерно по  на любом сегменте , где .

 в) Ряд, полученный дифференцированием ряда (22) по , сходится в метрике  равномерно по  в любом сегменте , где .

 г) Сумма ряда (22) удовлетворяет начальному условию (6).

 д) Сумма ряда (22) удовлетворяет интегральному соотношению



 (23)

при произвольной , равном нулю при .

(В случае, неоднородной граничной задачи , то в правой части уравнение слагается ).

В самом деле,

 а) Ряд (22) – ортогональный в , и достаточно проверить, что равномерно на сегменте  сходится ряд из квадратов коэффициентов



. (24)

Функция  непрерывна по  при . Отсюда, следует что на сегменте  непрерывна .

Теперь нетрудно доказать, что второй ряд справа в (24) сходится равномерно. Действительно по неравенству Буняковского



. (25)

 Заменив здесь  наименьшим значением этой величины , найдём, что общий член упомянутого выше ряда имеет оценку . Равенство

  (26)

показывает, что ряд (26) с неотрицательными непрерывными членами сходится и имеет непрерывную сумму. По известной теореме Дини ряд (26) равномерно сходится на сегменте  при любом . А тогда равномерно сходится и второй ряд справа в (22).

 Проще устанавливается сходимость первого ряда (22):

,

а ряд  сходится в силу неравенства Бесселя.

 Из доказанного следует, что сумма ряда (22)  принадлежит классу .

 б) Ряд (22) сходится в метрике  равномерно по  на любом сегменте , где .

 В метрике  функции  ортонормированы. Ряд (22) можно представить

 . (27)

 Достаточно, чтобы равномерно сходился ряд из квадратов. Оценим эти последние. Имеем

. (28)

 Теперь



. (29)

 Мы воспользовались здесь оценкой (25). Ряд с общим членом (29) сходится равномерно, и утверждение б) доказано. Из этого утверждения следует, что

.

 в) Ряд, полученный дифференцированием ряда (22) по , сходится в метрике  равномерно по  в любом сегменте , где .

 После дифференцирование ряда (22) по  получаем ряд



или, если взять интеграл по частям,

. (30)

Это по-прежнему ряд по полной ортонормированной в  системе . Оценим его коэффициенты. По неравенству Коши квадрат коэффициента при  в ряде (30) не превосходит величины



. (31)

 Из сделанных нами предположений о функциях  и  следует, что ряд с общим членом (31) сходится. В таком случае ряд (30) сходится в метрике  равномерно по  в любом сегменте , где . Утверждение в) доказано.

 Из этого утверждения следует, что сумма ряда (22) .

 г) Сумма ряда (22) удовлетворяет начальному условию (6). Действительно, в силу доказанного в пункте а) в этом ряде можно почленно переходить к пределу при  , поэтому

.

д) Сумма ряда (22) удовлетворяет интегральному соотношению (23). Пусть . Обе части ряда (22), предварительно продифференцированного по , умножим скалярно (в метрике ) на :

 .

Заменяя  по формуле (18), получаем





 



,

т.е.

.

 Если взять интеграл по  в сегменте , то получаем



,

или при произвольной , равном нулю при  выполняется соотношение



.

Утверждение доказано.

 **Замечание.** Метод Фурье без всяких изменений переносится на задачи вида

 , (32)

где  – произвольный положительно определённый оператор с дискретным спектром, действующий в некотором гильбертовом пространстве ,  и  – абстрактные функции, данная и искомая, со значениями в том же пространстве. Слабые решение задачи (32) по–прежнему определяется как абстрактная функция, удовлетворяющая тождеству

, (33)

начальному условию

. (34)

Это решение существует, единственно и может быть вычислено по формуле

. (22)

В частности, так могут быть построены (при подходящем выборе пространства ) слабые решения, соответствующие краевым условиям .

 Аналогичное замечание справедливо и тогда, когда речь идёт о применении метода Фурье к волновому уравнению.