Лекция №3

§ 2. Точные грани числовых множеств

1. Верхняя и нижняя грани числовых множеств. Множество X вещественных чисел ($X \subset R$) называется *ограниченным сверху*, если существует вещественное число C такое, что все элементы множества X не превосходят C, т. е.

$$\exists C \in R\colon\ \forall x \in X \to x \leqslant C. \tag{1}$$

Всякое вещественное число C, обладающее свойством (1), называют *верхней гранью числового множества* X.

Аналогично множество $X \subset R$ называется *ограниченным снизу*, если

$$\exists C' \in R\colon\ \forall x \in X \to x \geqslant C'. \tag{2}$$

Всякое число C', удовлетворяющее условию (2), называют *нижней гранью числового множества* X.

Если числовое множество ограничено как сверху, так и снизу, его называют *ограниченным*, т. е. $\{X$ — ограниченное множество$\} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \{\exists C' \in R\ \ \exists C \in R\colon\ \ \forall x \in X \to C' \leqslant x \leqslant C\}$.

Пример 1. Записать $\rceil A$ с помощью кванторов, если

$$A = \{C\ \text{— верхняя грань множества}\ X \subset R\}.$$

$\triangle$ По условию $A = \{\forall x \in X \to x \leqslant C\}$. Используя правило построения отрицания (§ 1, пример 2), получаем

$$\rceil A = \{\exists x_0 \in X\colon\ x_0 > C\}.\ \blacktriangle$$

Пример 2. Записать $\rceil B$, если

$$B = \{\text{множество}\ X\ \text{ограничено снизу}\}.$$

$\triangle$ По условию $B = \{\exists C \in R\colon\ \forall x \in X \to x \geqslant C\}$. Поэтому

$$\rceil B = \{\forall C \in R\quad \exists x_C \in X\colon\ x_C < C\}.\ \blacktriangle$$

Упражнение 1. Записать с помощью кванторов отрицания следующих утверждений:

а) $A = \{$множество $X \subset R$ ограничено сверху$\}$;

б) $B = \{C$ — нижняя грань множества $X\}$;

в) $D = \{$множество X является ограниченным$\}$.

2. Определение точной верхней и нижней грани. Пусть числовое множество X ограничено сверху, тогда выполняется условие (1), а число C является верхней гранью множества X. Ясно, что любое число, большее C, также является верхней гранью множества X. Таким образом, ограниченное сверху числовое множество имеет бесконечно много верхних граней, среди которых особую роль играет наименьшая. Речь идет о числе M, обладающем следующими свойствами:

а) M — верхняя грань множества X;

б) любое число M' меньшее M, не является верхней гранью множества X.

Это число M будем в дальнейшем называть точной верхней гранью множества X. Сформулируем определение точной верхней грани с помощью символов. Чтобы подчеркнуть важность вводимого понятия (и будем так поступать в дальнейшем), поставим перед ним слово "определение".

Определение 1. Число M называется *точной верхней гранью числового множества* X, если выполняются следующие условия:

а) $$\forall x \in X \to x \leqslant M; \tag{3}$$

б) $$\forall \alpha < M \exists x_\alpha \in X \colon\ x_\alpha > \alpha. \tag{4}$$

Точная верхняя грань числового множества X обозначается $\sup X$ (читается "супремум"). Таким образом,

$$\{M = \sup X\} \Leftrightarrow \{\forall x \in X \to x \leqslant M\} \wedge \{\forall \alpha < M \quad \exists x_\alpha \in X \colon\ x_\alpha > a\}.$$

Замечание 1. Число $M = \sup X$ может как принадлежать, так и не принадлежать множеству X. Например, если X — множество чисел x таких, что $1 \leqslant x < 2$, то $\sup X = 2 \notin X$. Если X_1 — объединение множеств X и числа 3, то $\sup X_1 = 3 \in X_1$.

Замечание 2. Из определения точной верхней грани следует, что если у числового множества X существует точная верхняя грань M, то она единственна.

Упражнение 2. Пусть $M = \sup X$ и $x_0 \in X$. Обозначим $\widetilde{X}$ подмножество множества X, состоящее из всех элементов $x \in X$, удовлетворяющих условию $x \geqslant x_0$, т. е. $\widetilde{X} = \{x \in X \colon\ x \geqslant x_0\}$. Доказать, что $\sup \widetilde{X} = M$.

Определение 2. Число m называется *точной нижней гранью числового множества* X, если выполняются следующие условия:

а) $\forall x \in X \to x \geqslant m$;

б) $\forall \beta > m\ \exists x_\beta \in X\colon\ x_\beta < \beta$.

Точная нижняя грань множества X обозначается $\inf X$ (читается “инфимум”). Таким образом,

$$\{m = \inf X\} = \{\forall x \in X \to x \geqslant m\} \wedge \{\forall \beta > m \quad \exists x_\beta \in X\colon\ x_\beta < \beta\}.$$

Упражнение 3. Записать с помощью кванторов утверждения:

а) число M не является точной верхней гранью числового множества X;

б) число m не является точной нижней гранью числового множества X.

Упражнение 4. Пусть у числового множества X существует его точная верхняя грань $\sup X$. Рассмотрим множество Y, состоящее из чисел, противоположных числам множества X, т. е. $Y = \{y\colon\ y = -x,\ x \in X\}$. Показать, что $\inf Y = -\sup X$.

3. Существование точной верхней (нижней) грани.

Теорема 1. *Если непустое множество вещественных чисел* X *ограничено сверху, то существует* $\sup X$; *если непустое множество* X *ограничено снизу, то существует* $\inf X$.

○ Ограничимся доказательством существования точной верхней грани. По условию множество X не пусто, т. е. содержит хотя бы один элемент. Возможны два случая:

1) множество X содержит хотя бы одно неотрицательное число;

2) все элементы множества X отрицательны.

Первый случай. Предположим, что все элементы множества X неотрицательны. По условию множество X ограничено сверху и поэтому выполняется условие (1). Пусть $C = c_0, c_1 c_2 ... c_n ...$; тогда c_0 — неотрицательное целое число, причем $C < c_0 + 1$, где $c_0 + 1 = n_0 \in N$. Следовательно,

$$\forall x \in X \to x \leqslant C < n_0. \tag{5}$$

Если $x = a_0, a_1 a_2 ... = a_0, \{a_n\}$ — произвольный элемент множества X, то из (5) следует, что $0 \leqslant a_0 < n_0$. Рассмотрим множество E целых частей элементов множества X. Так как E — конечное непустое множество целых неотрицательных чисел, то в этом множестве есть наибольший элемент $\overline{a}_0$. Обозначим

$$X_0 = \{x \in X\colon\ x = \overline{a}_0, \{a_n\}\}.$$

Множество X_0 состоит из всех тех элементов множества X, у которых целая часть равна $\overline{a}_0$; множество X_0 непустое, причем $X \supset X_0$.

Пусть E_1 — множество первых десятичных знаков элементов множества X_0. Так как множество E_1 конечно (его элементами могут быть числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и непусто, то существует $\overline{a}_1 = \max\limits_{x \in X_0} a_1$ — наибольший из первых десятичных знаков элементов множества X_0.

Пусть $X_1 = \{x \in X\colon\ x = \overline{a}_0, \overline{a}_1 a_2 ...\}$; тогда $X \supset X_0 \supset X_1$. Обозначим $\overline{a}_2 = \max\limits_{x \in X_1} a_2$ наибольший из вторых десятичных знаков элементов множества X_1,

$$X_2 = \{x \in X_1\colon\ a_2 = \overline{a}_2\} = \{x \in X\colon\ x = \overline{a}_0, \overline{a}_1 \overline{a}_2 a_3 ...\}.$$

Продолжая эти рассуждения, построим последовательность $\{X_k\}$ непустых множеств и последовательность десятичных знаков $\{\overline{a}_k\}$ такие, что $X \supset X_0 \supset X_1 \supset ... \supset X_{k-1} \supset X_k \supset ...$,

$$\overline{a}_k = \max_{x \in X_{k-1}} a_k,$$

$$X_k = \{x \in X_{k-1}\colon\ a_k = \overline{a}_k\} = \{x \in X\colon\ x = \overline{a}_0, \overline{a}_1 ... \overline{a}_k a_{k+1} ...\}.$$

Рассмотрим десятичную дробь $\overline{x} = \overline{a}_0, \overline{a}_1 ... = \overline{a}_0, \{\overline{a}_n\}$. Покажем, что $x = \sup X$, т. е. что

$$\forall x \in X \to x \leqslant \overline{x}, \tag{6}$$

$$\forall x' < \overline{x} \quad \exists \tilde{x} \in X\colon\ \widetilde{x} > x'. \tag{7}$$

Возьмем произвольное число $x \in X$ и пусть $x = a_0, \{a_n\}$. Чтобы проверить выполнение условия (6), рассмотрим три возможных случая:

$$x \notin X_k \quad \text{при} \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{8}$$

$$x \in X_k \quad \text{при} \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{9}$$

$$\exists m\colon\ x \in X_{m-1}, \quad x \notin X_m. \tag{10}$$

Из (8) следует, что $a_0 < \overline{a}_0$ и поэтому $x < \overline{x}$. Если выполнено условие (9), то $a_k = \overline{a}_k$ при $k = 0, 1, 2, ...$, откуда, по определению числа $\overline{x}$, справедливо равенство $x = \overline{x}$. Наконец, из (10), согласно определению множества X_m и числа $\overline{x}$, следует, что

$$x = \overline{a}_0, \overline{a}_1 ... \overline{a}_{m-1} a_m ... < \overline{a}_0, \overline{a}_1 ... \overline{a}_{m-1} \overline{a}_m (0) \leqslant \overline{x},$$

и поэтому $x < \overline{x}$. Таким образом, неравенство (6) доказано.

Проверим условие (7). Если $x' < 0$, то (7) имеет место при любом $\widetilde{x} \in X$, так как все элементы множества X неотрицательны.

Пусть $0 \leqslant x' < \overline{x}$ и $x' = a'_0, \{a'_n\}$. Тогда либо $a'_0 < \overline{a}_0$, либо $a'_k = \overline{a}_k$ при $k = \overline{0, m-1}, a'_m < \overline{a}_m$. В первом случае в качестве $\widetilde{x}$ можно взять любой элемент множества X_0, так как из условий $a'_0 < \overline{a}_0$ и $\widetilde{x} \in X_0$ следует, что

$$x' < \widetilde{x} = \overline{a}_0, a_1 ... a_n ... \leqslant \overline{x}, \quad \text{т. е.} \quad x' < \widetilde{x} \leqslant \overline{x} \quad \text{и} \quad \widetilde{x} \in X_0 \subset X.$$

Во втором случае условию (7) удовлетворяет произвольный элемент $\widetilde{x} \in X_m$, так как

$$x' = \overline{a}_0, \overline{a}_1 ... \overline{a}_{m-1} a'_m ... < \overline{a}_0, \overline{a}_1 ... \overline{a}_{m-1} \overline{a}_m a_{m+1} ... = \widetilde{x} \leqslant \overline{x}.$$

Таким образом, $x' < \widetilde{x} \leqslant \overline{x}$, где $\widetilde{x} \in X_m \subset X$. Условие (7) проверено.

Итак, условия (6) и (7) выполняются, т. е. $x = \sup X$. Тем самым доказано существование точной верхней грани в предположении, что все элементы множества X неотрицательны.

Если множество X содержит хотя бы один неотрицательный элемент $x_0 \geqslant 0$, то множество $\{\widetilde{X} = x \in X\colon\ x \geqslant x_0\}$ состоит из неотрицательных чисел, причем $\sup X = \sup \widetilde{X}$ (упр. 2). Поэтому непустое ограниченное сверху числовое множество X имеет точную верхнюю грань.

Второй случай. Если все элементы множества X отрицательны, то произвольный элемент $x \in X$ записывается в виде

$$x = -a_0, a_1 a_2 ... a_n ... \tag{11}$$

Пусть a^*_0 — наименьшее из чисел a_0 в записи (11) для всех $x \in X$, a^*_1 — наименьший из первых десятичных знаков тех элементов множества X, у которых $a_0 = a^*_0$; a^*_2 — наименьший из вторых десятичных знаков тех элементов множества X, у которых $a_0 = a^*_0$, $a_1 = a^*_1$ и т. д. Указанным способом определяется число $x^* = -a^*_0, a^*_1 ... a^*_n ... = -a^*_0, \{a^*_n\}$. По аналогии с первым случаем доказывается, что число x^* является точной верхней гранью множества. ●

Теорема 2. *Если X и Y — непустые множества вещественных чисел такие, что для любого $x \in X$ и любого $y \in Y$ справедливо неравенство*

$$x \leqslant y, \tag{12}$$

то существуют $\sup X$ и $\inf Y$, *причем*

$$\forall x \in X \ \ \forall y \in Y \to x \leqslant \sup X \leqslant \inf Y \leqslant y. \tag{13}$$

○ Так как X — непустое множество, ограниченное сверху любым элементом множества Y в силу (12), то по теореме 1 существует $\sup Y$. Аналогично из ограниченности непустого множества Y снизу любым элементом множества X следует существование $\inf Y$. По определению точных граней

$$\forall x \in X \to x \leqslant \sup X, \ \ \forall y \in Y \to \inf Y \leqslant y. \tag{14}$$

Из (14) следует, что для доказательства утверждения (13) достаточно показать, что

$$\sup X \leqslant \inf Y. \tag{15}$$

Из неравенства (12) следует, что каждое число $y \in Y$ является верхней гранью множества X. Точная верхняя грань множества X, т. е. число $\sup X$, есть наименьшая из всех верхних граней множества X. Следовательно, для любого $y \in Y$ выполняется неравенство

$$\sup X \leqslant y. \tag{16}$$

Из неравенства (16) следует, что $\sup X$ есть нижняя грань множества Y. Точная нижняя грань множества Y, т. е. число $\inf Y$, есть наибольшая из всех нижних граней множества Y. Значит, $\sup X \leqslant \inf Y$. ●

З а м е ч а н и е 3. Пусть ξ — любое вещественное число такое, что

$$\sup X \leqslant \xi \leqslant \inf Y. \tag{17}$$

Тогда из (13) и (17) следует неравенство

$$x \leqslant \xi \leqslant y, \tag{18}$$

которое справедливо для любого $x \in X$ и любого $y \in Y$. Про число ξ, удовлетворяющее неравенству (18), говорят, что оно отделяет множество X от множества Y. Поэтому теорему 2 часто называют *теоремой об отделимости числовых множеств.*