Лекция №4

§ 3. Операции над вещественными числами

1. Сложение и вычитание вещественных чисел. *Суммой* двух вещественных чисел α и β называется такое вещественное число δ, что для любых рациональных чисел r, s, r', s', удовлетворяющих условиям

$$r \leqslant \alpha \leqslant s, \quad r' \leqslant \beta \leqslant s', \tag{1}$$

выполняется неравенство

$$r + r' \leqslant \delta \leqslant s + s'. \tag{2}$$

Сумма чисел α и β обозначается $\alpha + \beta$.

Теорема 1. *Для любых вещественных чисел α и β их сумма существует и единственна.*

○ а) Существование суммы. Из условий (1) в силу транзитивности знака неравенства следует, что $r \leqslant s$, $r' \leqslant s'$. Отсюда, используя свойства неравенств для рациональных чисел, получаем

$$r + r' \leqslant s + s'. \tag{3}$$

Пусть E — множество чисел вида $r + r'$, E_1 — множество чисел вида $s + s'$. Тогда по теореме об отделимости числовых множеств (§ 2, теорема 2) существуют числа $\sup\ E$ и $\inf\ E_1$ и выполняется неравенство

$$r + r' \leqslant \sup E \leqslant \inf E_1 \leqslant s + s'.$$

Поэтому число $\delta = \sup E$ удовлетворяет условиям (2), т. е. δ — сумма чисел α и β.

б) Единственность суммы. Пусть δ и δ' удовлетворяют условиям (2) и пусть $\delta \leqslant \delta'$. Тогда $r + r' \leqslant \delta \leqslant \delta' \leqslant s + s'$. Докажем, что $\delta = \delta'$. Заметим, что неравенства (1) будут выполняться, если в качестве r и r' (s и s') взять $(n+1)$-е десятичные приближения (§ 1, п. 3, в)) с недостатком (с избытком) соответственно для чисел α и β, т. е.

$$\underline{\alpha}_{n+1} \leqslant \alpha \leqslant \overline{\alpha}_{n+1}, \quad \underline{\beta}_{n+1} \leqslant \beta \leqslant \overline{\beta}_{n+1}. \tag{4}$$

Так как сумма вещественных чисел α и β существует, то из условий (4) с учетом неравенства $\delta \leqslant \delta'$ получаем

$$r_n = \underline{\alpha}_{n+1} + \underline{\beta}_{n+1} \leqslant \delta \leqslant \delta' \leqslant \overline{\alpha}_{n+1} + \overline{\beta}_{n+1} = s_n, \tag{5}$$

где

$$s_n - r_n = \overline{\alpha}_{n+1} - \underline{\alpha}_{n+1} + \overline{\beta}_{n+1} - \underline{\beta}_{n+1} = \frac{2}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^n}. \tag{6}$$

Последовательности $\{r^n\}$ и $\{s^n\}$ удовлетворяют условиям (5) и (6) и по лемме 2 (§ 1, п. 5) справедливо равенство $\delta = \delta'$. ●

Вычитание вещественных чисел по аналогии с вычитанием рациональных чисел вводится как действие, обратное сложению (§ 1, п. 2).

2. Умножение и деление вещественных чисел. *Произведением* двух положительных вещественных чисел α и β называют такое вещественное число δ, что для любых рациональных чисел r, s, r', s', удовлетворяющих условиям

$$0 < r \leqslant \alpha \leqslant s, \quad 0 < r' \leqslant \beta \leqslant s', \tag{7}$$

выполняется неравенство

$$rr' \leqslant \delta \leqslant ss'. \tag{8}$$

Произведение чисел α и β обозначается $\alpha\beta$.

Теорема 2. *Произведение любых двух положительных вещественных чисел существует и единственно.*

○ Доказательство существования произведения проводится по аналогии с доказательством существования суммы (теорема 1). В качестве δ можно взять $\sup G$, где G — множество чисел вида rr', а r и r' — рациональные числа, удовлетворяющие условиям (7). Докажем единственность произведения.

Пусть a_0 — целая часть числа α, b_0 — целая часть числа β, $\underline{\alpha}_m$, $\underline{\beta}_m$ — десятичные приближения с недостатком, $\overline{\alpha}_m$, $\overline{\beta}_m$ — десятичные приближения с избытком для чисел α и β соответственно. Тогда

$$\underline{\alpha}_m \leqslant \alpha \leqslant \overline{\alpha}_m \leqslant a_0 + 1, \quad \underline{\beta}_m \leqslant \beta \leqslant \overline{\beta}_m \leqslant b_0 + 1.$$

Выберем $k \in N$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$a_0 + b_0 + 2 < 10^k.$$

Тогда для любого m справедливо неравенство

$$\underline{\alpha}_m + \overline{\beta}_m < 10^k, \tag{9}$$

так как $\underline{\alpha}_m \leqslant a_0 + 1$ и $\overline{\beta}_m \leqslant b_0 + 1$.

Предположим, что существуют числа δ и δ', удовлетворяющие условию (8), причем $\delta \leqslant \delta'$. Возьмем в неравенствах (7) и (8) в качестве чисел r, s, r', s' соответственно $\underline{\alpha}_{n+k}$, $\overline{\alpha}_{n+k}$, $\underline{\beta}_{n+k}$, $\overline{\beta}_{n+k}$ и обозначим $r_n = \underline{\alpha}_{n+k}\underline{\beta}_{n+k}$, $s_n = \overline{\alpha}_{n+k}\overline{\beta}_{n+k}$. Тогда, используя (8) и (9), получаем

$$s_n - r_n = (\overline{\alpha}_{n+k} - \underline{\alpha}_{n+k})\overline{\beta}_{n+k} + \underline{\alpha}_{n+k}(\overline{\beta}_{n+k} - \underline{\beta}_{n+k}) =$$

$$= \frac{\overline{\beta}_{n+k}}{10^{n+k}} + \frac{\underline{\alpha}_{n+k}}{10^{n+k}} \leqslant \frac{10^k}{10^{n+k}} = \frac{1}{10^n}$$

для любого $n \in N$.

Применяя лемму 2 § 1, получаем $\delta = \delta'$. ●

Произведение любых вещественных чисел α и β определяется следующими правилами:

1) если $\alpha = 0$, то $\alpha\beta = 0$ для любого $\beta \in R$;

2) если $\alpha < 0$, $\beta < 0$, то $\alpha\beta = |\alpha| \cdot |\beta|$;

3) если $\alpha > 0$, $\beta < 0$, или $\alpha < 0$, $\beta > 0$, то $\alpha\beta = -|\alpha| \cdot |\beta|$.

Ниже будет показано (п. 3, утверждение 2), что уравнение $x\alpha = \beta$, где α и β — произвольные вещественные числа, имеет при $\alpha \neq 0$ единственное решение. Это решение называется *частным* от деления числа β на число α и обозначается через β/α.

3. Свойства вещественных чисел. Можно показать, что операции сложения и умножения вещественных чисел обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции для рациональных чисел (§ 1, п. 2). Ограничимся доказательством свойства ассоциативности.

Утверждение 1. *Для любых вещественных чисел* α, β, γ *справедливо равенство*

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

○ Обозначим $\delta = \alpha + (\beta + \gamma)$, $\delta' = (\alpha + \beta) + \gamma$ и докажем, что $\delta = \delta'$. Предположим, что $\delta \leqslant \delta'$. Используя неравенства (4) и неравенство

$$\underline{\gamma}_{n+1} \leqslant \gamma \leqslant \overline{\gamma}_{n+1}, \tag{10}$$

где $\underline{\gamma}_{n+1}$ и $\overline{\gamma}_{n+1}$ — соответственно десятичные приближения $(n + 1)$-го порядка числа γ с недостатком и с избытком, из определения суммы вещественных чисел получаем

$$\underline{\alpha}_{n+1} + \underline{\beta}_{n+1} \leqslant \alpha + \beta \leqslant \overline{\alpha}_{n+1} + \overline{\beta}_{n+1}, \tag{11}$$

$$\underline{\beta}_{n+1} + \underline{\gamma}_{n+1} \leqslant \beta + \gamma \leqslant \overline{\beta}_{n+1} + \overline{\gamma}_{n+1}. \tag{12}$$

Применяя неравенства (10)–(12) и первое из неравенств (4), по определению суммы находим

$$(\underline{\alpha}_{n+1}+\underline{\beta}_{n+1})+\underline{\gamma}_{n+1}\leqslant(\alpha+\beta)+\gamma\leqslant(\overline{\alpha}_{n+1}+\overline{\beta}_{n+1})+\overline{\gamma}_{n+1},\quad(13)$$

$$\underline{\alpha}_{n+1}+(\underline{\beta}_{n+1}+\underline{\gamma}_{n+1})\leqslant\alpha+(\beta+\gamma)\leqslant\overline{\alpha}_{n+1}+(\overline{\beta}_{n+1}+\overline{\gamma}_{n+1}).\quad(14)$$

В силу ассоциативности сложения рациональных чисел левые части неравенств (13) и (14) равны числу $r_n=\underline{\alpha}_{n+1}+\underline{\beta}_{n+1}+\underline{\gamma}_{n+1}$, а правые части равны числу $\rho_n=\overline{\alpha}_{n+1}+\overline{\beta}_{n+1}+\overline{\gamma}_{n+1}$. Поэтому из (13) и (14) с учетом неравенства $\delta\leqslant\delta'$ получаем

$$r_n\leqslant\delta\leqslant\delta'\leqslant\rho_n,\quad(15)$$

где $\rho_n-r_n=\dfrac{3}{10^{n+1}}<\dfrac{1}{10^n}$, откуда в силу леммы 2, § 1 следует, что $\delta=\delta'$. ●

Аналогично доказывается справедливость других свойств операций сложения и умножения.

Отметим, что кроме свойств неравенств, указанных в § 1 (п. 2), для вещественных чисел справедливы следующие свойства:

1) если $a\neq0$, $ab=0$, то $b=0$;

2) если $a>b>0$ и $c>d>0$, то $ac>bd$;

3) если $a>b$, то $a^{2n+1}>b^{2n+1}$ для любого $n\in N$;

4) если $a>b\geqslant0$, то $a^n>b^n$ для любого $n\in N$.

Утверждение 2. *Если α и β — вещественные числа, и $\alpha\neq0$, то их частное β/α существует и единственно.*

○ Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha>0$ и $\beta=1$. Пусть $\underline{\alpha}_n$ и $\overline{\alpha}_n$ — десятичные приближения числа α с недостатком и с избытком. Так как $\alpha>0$, то найдется такое $m\in N$, что $\underline{\alpha}_m>10^{-m}$. Обозначим через X множество рациональных чисел вида $\dfrac{1}{\overline{\alpha}_{m+n}}$, $n\in N$, а через Y — множество рациональных чисел вида $\dfrac{1}{\underline{\alpha}_{m+n}}$. В силу теоремы 2, § 2 существует вещественное число x, разделяющее множества X и Y, т. е.

$$\frac{1}{\overline{\alpha}_{n+m}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{\underline{\alpha}_{n+m}},\quad n\in N.\quad(16)$$

Так как $\underline{\alpha}_n\leqslant\alpha\leqslant\overline{\alpha}_n$, то из определения произведения вещественных чисел следует, что при $n\in N$

$$1-10^{-n}\leqslant\frac{\underline{\alpha}_{n+m}}{\overline{\alpha}_{n+m}}\leqslant x\alpha\leqslant\frac{\overline{\alpha}_{n+m}}{\underline{\alpha}_{n+m}}\leqslant1+10^{-n}.\quad(17)$$

В силу леммы 2, § 1 получаем, что $x\alpha=1$, т. е. $x=\dfrac{1}{\alpha}$.

Если $\alpha<0$, то положим $\dfrac{1}{\alpha}=-\dfrac{1}{|\alpha|}$.

Пусть α и β — вещественные числа и $\alpha \neq 0$. Пользуясь ассоциативностью операции умножения вещественных чисел, нетрудно показать, что число $x = \beta \dfrac{1}{\alpha}$ — есть решение уравнения $x\alpha = \beta$. Покажем, что это решение единственно. Если $x\alpha = \beta$ и $y\alpha = \beta$, то $(x - y)\alpha = 0$. Так как $\alpha \neq 0$, то $x - y = 0$, т. е. $x = y$. ●

Перечислим те свойства вещественных чисел, в которых используется понятие модуля вещественного числа:

$$|-a| = |a|, \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \tag{18}$$

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \quad |a - b| \geqslant ||a| - |b||. \tag{19}$$

Докажем неравенства (19). Складывая неравенства $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ и $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$, получаем, что $-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$, т. е. $|a + b| \leqslant |a| + |b|$. Так как $a = (a - b) + b$, $b = (b - a) + a$, то $|a| \leqslant |a - b| + |b|$ и $|b| \leqslant |b - a| + |a| = |a - b| + |a|$. Следовательно, $|a - b| \geqslant |a| - |b|$ и $|a - b| \geqslant |b| - |a|$, т. е. $|a - b| \geqslant ||a| - |b||$.

Пусть α, δ — заданные вещественные числа, причем $\delta > 0$. Тогда неравенство

$$|x - a| < \delta \tag{20}$$

равносильно (рис. 3.1) двойному неравенству

$$a - \delta < x < a + \delta,$$

т. е. множество решений неравенства (20) — интервал $(a - \delta, a + \delta)$; в частности, неравенство

$$|x| < \delta, \quad \text{где} \quad \delta > 0,$$

равносильно двойному неравенству

$$-\delta < x < \delta.$$

Неравенство

$$|x - a| > \delta, \quad \delta > 0, \tag{21}$$

выполняется при $x < a - \delta$ и при $x > a + \delta$ (рис. 3.2), т. е. множество

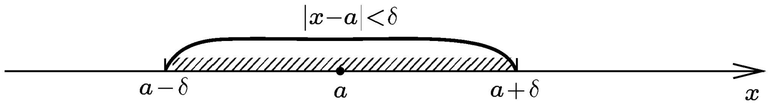

Рис. 3.1

Рис. 3.2

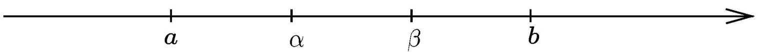

Рис. 3.3

решений неравенства (21) — объединение бесконечных интервалов

$(-\infty, a - \delta)$ и $(a + \delta, +\infty)$; в частности, неравенство

$$|x| > \delta$$

выполняется при $x < -\delta$ и при $x > \delta$.

Если $a < b$ и α, β — любые точки отрезка $[a, b]$, т. е. $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$ (рис. 3.3) или $a \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant b$, то

$$|\alpha - \beta| \leqslant b - a. \tag{22}$$

Неравенство (22) имеет очевидный геометрический смысл: расстояние между точками α и β не превосходит расстояния между точками a и b.

4. Арифметический корень. Как известно, уравнения вида
$$x^m = a, \tag{23}$$
где m — натуральное число, не всегда имеют корни на множестве рациональных чисел даже в случае, когда $a \in N$. Введение иррациональных чисел связано, в частности, с потребностью находить корни уравнений вида (23).

Предполагая, что a — заданное положительное число (не обязательно рациональное), $m \in N$, $m \geqslant 2$, будем искать положительное число ξ, удовлетворяющее уравнению (23). Это число ξ назовем *арифметическим корнем степени m из числа a* и обозначим $\sqrt[m]{a}$.

Утверждение 3. *Для любого $m \in N$ и любого $a > 0$ существует единственный арифметический корень степени m из числа a.*

○ Если существует число $\xi \in Q$ такое, что $\xi^m = a$, то это число и будет искомым. Поэтому достаточно ограничиться предположением, что такого рационального числа нет.

Пусть $X = \{x \in Q\colon\ x > 0,\ x^m < a\}$, $Y = \{y \in Q\colon\ y > 0,\ y^m > a\}$. Выберем такое число $p \in N$, чтобы выполнялось неравенство $1/p < a < p$, тогда $1/p^m < a^m < p^m$ и поэтому $1/p \in X$, $p \in Y$. Следовательно, X, Y — непустые множества.

По определению множеств X и Y для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x^m < a$, а для любого $y \in Y$ — неравенство $a < y^m$, откуда следует, что $x^m < y^m$. Так как $x > 0$, $y > 0$, то неравенство $x^m < y^m$ равносильно неравенству $x < y$, откуда согласно теореме об отделимости числовых множеств (§ 2) следует, что существует $\sup X$ и $\inf Y$, причем
$$x \leqslant \sup X \leqslant \inf Y \leqslant y \tag{24}$$
для всех $x \in X$ и для всех $y \in Y$.

Обозначим $\xi = \sup X$ и докажем, что ξ — арифметический корень степени m из числа $a > 0$, т. е. $\xi^m = a$, где $\xi > 0$. Пусть $x < \xi < y$.

Очевидно, что $x \in X$. Если $x \notin X$, то $x^m > 0$ и, следовательно, $x \in Y$. Но тогда из (24) следует, что $x \geqslant \xi$, что противоречит условию $x < \xi$. Аналогично получаем, что $y \in Y$. Поэтому
$$x^m < a < y^m. \tag{25}$$

Так как $x < \xi < y$, то
$$x^m < \xi^m < y^m. \tag{26}$$

Чтобы воспользоваться леммой 2, § 1, оценим разность $y^m - x^m$. Применяя формулу $y^m - x^m = (y - x)(y^{m-1} + xy^{m-2} + ... + x^{m-1})$ и учитывая, что $x > 0$, $y > 0$, $y > x$, получаем
$$0 < y^m - x^m < (y - x)my^{m-1}. \tag{27}$$

Будем в дальнейшем в качестве элементов $y \in Y$ брать все те и только те элементы множества Y, которые удовлетворяют условию $y \leqslant p$, где p — указанное выше натуральное число ($p \in Y$). Тогда из (27) следует, что $0 < y^m - x^m < (y-x)mp^{m-1}$. Выберем далее $s \in N$ так, чтобы выполнялось неравенство $mp^{m-1} \leqslant 10^s$; тогда

$$0 < y^m - x^m < (y-x)10^s. \tag{28}$$

Пусть $\overline{\xi}_k$ и $\underline{\xi}_k$ — k-е десятичные приближения числа ξ соответственно с избытком и с недостатком. Тогда $x_n < \xi < y_n$, где $x_n = \underline{\xi}_{n+s}$, $y_n = \overline{\xi}_{n+s}$ и $x_n \in Q$, $y_n \in Q$ для любого $n \in N$.

При $x = x_n$ и $y = y_n$ неравенство (28) принимает вид

$$0 < y_n^m - x_n^m < (y_n - x_n)10^s = \frac{1}{10^n}, \tag{29}$$

причем это неравенство выполняется при любом $n \in N$.

По лемме 2, § 1 из (29), а также из неравенств, которые получаются из (25) и (26) заменой x на x_n и y на y_n, следует, что $\xi^m = a$, т. е. ξ — арифметический корень m-й степени из числа $a > 0$.

Единственность числа ξ следует из того, что разным положительным числам соответствуют и разные n-е степени их: если $0 < \xi < \xi_1$, то $\xi^n < \xi_1^n$. ●

5. Метод математической индукции. Суммирование. Бином Ньютона. При вычислении пределов и в других разделах математического анализа нам потребуются некоторые сведения из курса элементарной математики. Имеются в виду метод математической индукции и его применение для доказательства тождеств и неравенств, суммирование и бином Ньютона.

а) *Метод математической индукции.* Чтобы доказать, что некоторое утверждение верно для любого $n \in N$ (номера n), достаточно доказать, что:

1) это утверждение верно при $n = 1$;

2) из предположения о справедливости утверждения для номера n следует справедливость этого утверждения для следующего номера $n + 1$.

Такой метод доказательства называют *методом математической индукции.*

Приведем примеры применения этого метода.

Пример 1. Доказать равенство

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (30)$$

$\triangle$ При $n=1$ равенство (30) верно ($1=1$). Нужно доказать, что из предположения о справедливости формулы (30) следует справедливость равенства

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \qquad (31)$$

Прибавляя к обеим частям верного равенства (30) слагаемое $(n+1)^2$, получаем

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2. \qquad (32)$$

Преобразуя правую часть равенства (32), находим

$$\frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6)=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Таким образом, равенство (31) является верным, и поэтому формула (30) справедлива при любом $n \in N$. $\blacktriangle$

Утверждение 4. *Если* $x \geqslant -1$, *то для любого* $n \in N$ *выполняется неравенство Бернулли*

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx. \qquad (33)$$

$\circ$ При $n=1$ утверждение (33) верно ($1+x=1+x$). Нужно доказать, что при $x \geqslant -1$ из предположения о справедливости неравенства (33) следует справедливость неравенства

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x. \qquad (34)$$

Если неравенство (33) является верным, то при умножении обеих частей его на $1+x$, где $1+x \geqslant 0$, получим верное неравенство

$$(1+x)^{n+1} \geqslant (1+nx)(1+x),$$

где $(1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x$, так как $nx^2 \geqslant 0$.

Таким образом, при $x \geqslant -1$ справедливо неравенство (34), и поэтому неравенство (33) является верным при любом $n \in N$. $\bullet$

б) *Суммирование.* Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — заданные числа, то их сумму обозначают символом $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\ldots+a_n,$$

а число k называют *индексом суммирования.* Аналогично символом $\sum\limits_{k=m}^{m+p} a_k$ обозначают сумму чисел $a_m, a_{m+1}, ..., a_{m+p}$.

Сумма не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования, а операция суммирования обладает свойством линейности, т. е. для любых чисел A и B справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n}(Aa_k + Bb_k) = A\sum_{k=1}^{n} a_k + B\sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Отметим, что равенство

$$\sum_{k=1}^{p} a_{k+m} = \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k$$

называют *формулой замены индекса суммирования.*

Аналогично

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} a_k = \sum_{k=n-n_1}^{n-n_2} a_{n-k}.$$

Из курса школьной математики известны формулы для сумм арифметической и геометрической прогрессии.

Если $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия с разностью d, то сумму S_n первых n членов прогрессии можно записать в виде

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\, n \tag{35}$$

или выразить через n и a_1:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\, n.$$

Если $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q \neq 1$, то сумму S_n первых n членов прогрессии можно записать так:

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}. \tag{36}$$

Задачу о нахождении суммы вида $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, где $\{a_n\}$ — заданная числовая последовательность, обычно рассматривают как задачу о представлении S_n в виде функции от n, удобной для вычислений.

В частности, если существует последовательность $\{b_k\}$ такая, что для всех $k \in N$ справедливо равенство $a_k = b_{k+1} - b_k$, то

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_{k+1} - b_k) =$$
$$= b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + ... + b_n - b_{n-1} + b_{n+1} - b_n,$$

откуда получаем

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1. \tag{37}$$

П р и м е р 2. Найти формулу для суммы S_n, если:

а) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k a_{k+1}}$, где $\{a_k\}$ — арифметическая прогрессия, все члены и разность d которой отличны от нуля;

$$\text{б)}\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx; \tag{38}$$

в) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2.$

△ а) Так как $a_{k+1} - a_k = d$ для любого $k \in N$, то

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)\frac{1}{d}.$$

Применяя формулу (37) для $b_k = -\dfrac{1}{da_k}$, получаем

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{da_1} - \frac{1}{d(a_1 + nd)}. \tag{39}$$

б) Умножая обе части равенства (38) на $2\sin\dfrac{x}{2}$, находим

$$2\sin\frac{x}{2}\, S_n = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx.$$

Используя равенство

$$2\sin\frac{x}{2}\ \sin kx = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x$$

и формулу (37) для $b_k = -\cos\left(k - \dfrac{1}{2}\right)x$, получаем

$$2\sin\frac{x}{2}\, S_n = \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x = 2\sin\frac{n+1}{2}x\ \sin\frac{n}{2}x,$$

откуда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\,x\ \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{40}$$

Формула (40) справедлива при условии, что $\sin\dfrac{x}{2} \neq 0$.

Если $\sin\dfrac{x}{2} = 0$, то $S_n = 0$.

в) Воспользуемся тождеством

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1. \qquad (41)$$

Полагая в (41) $x = 1, 2, ..., n$ и складывая получаемые равенства, находим

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n. \qquad (42)$$

Так как левая часть (42) в силу равенства (37) равна $(n+1)^3 - 1$, а $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (формула (35)), то из равенства (42) следует, что

$$3S_n = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3}{2}\,n(n+1),$$

откуда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (43)$$

Заметим, что формула (43) была доказана в примере 1 методом математической индукции. ▲

в) *Бином Ньютона.* Из курса школьной математики известно, что

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Утверждение 6. *Для любых чисел a, b и при любом $n \in N$ справедлива формула бинома Ньютона*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n, \qquad (44)$$

где

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{k!}; \quad k = \overline{1,n}; \quad k! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k. \qquad (45)$$

Правую часть формулы называют *разложением бинома*, числа C_n^k — *биномиальными коэффициентами*, слагаемое $C_n^k a^{n-k} b^k$ — *k-м членом разложения бинома.*

○ Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ формула (44) верна, так как ее правая часть равна $C_1^0 a + C_1^1 b = a + b$.

Предполагая справедливым равенство (44), докажем, что верна формула

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k. \qquad (46)$$

Умножая обе части равенства (44) на $a+b$, получаем

$$(a+b)^{n+1} = A_n + B_n,$$

где

$$A_n = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k,$$

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}.$$

Следовательно,

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}. \qquad (47)$$

Сравнивая правые части формул (46) и (47), заключаем, что для доказательства равенства (46) достаточно показать, что

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k. \qquad (48)$$

Используя формулу (45), находим

$$C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)...(n-(k-2))}{(k-1)!} = \frac{kn(n-1)...(n-(k-2))}{k!}.$$

Поэтому

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)...(n-(k-2))}{k!}(n-(k-1)+k) =$$
$$= \frac{(n+1)((n+1)-1)...((n+1)-(k-1))}{k!} = C_{n+1}^k.$$

Формула (48) верна, и поэтому справедливо равенство (46). Следовательно, формула (44) верна при любом $n \in N$. ●

Отметим, что

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{k!} = \frac{n(n-1)...(n-(k-1))(n-k)!}{k!\,(n-k)!},$$

т. е.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \qquad (49)$$

Поэтому формулу (44) можно записать в виде

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a^{n-k} b^k, \quad \text{где } 0! = 1.$$

Из формулы (49) следует, что

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (50)$$

З а м е ч а н и е 1. Разложение бинома (44) содержит $n+1$ член, причем в силу равенства (49) коэффициенты членов разложения, равноудаленных от концов разложения, одинаковы, а сумма степеней чисел a и b в каждом члене разложения равна n.

З а м е ч а н и е 2. Из формулы (44) при $a = 1$, $b = x$ находим

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \\ = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + nx^{n-1} + x^n. \quad (51)$$

Если $x > 0$, то все слагаемые в правой части равенства (51) положительны, и поэтому

$$(1+x)^n > 1 + nx, \quad x > 0, \quad (52)$$

$$(1+x)^n > C_n^k x^k, \quad x > 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (53)$$

Отметим, что неравенство (52) справедливо при $x > -1$ (утверждение 4).

6. Счетность множества рациональных чисел. Множества X и Y называют *эквивалентными* и пишут $X \sim Y$, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Это означает, что:

а) каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент $y \in Y$;

б) каждый элемент $y \in Y$ при этом соответствует некоторому элементу $x \in X$;

в) разным элементам множества X соответствуют разные элементы множества Y.

Множество X, эквивалентное множеству натуральных чисел N, называется *счетным*. Если обозначить через x_n элемент счетного множества X, соответствующий числу $n \in N$, то образуется последовательность $\{x_n\}$. Говорят также, что элементы счетного множества можно занумеровать числами натурального ряда.

У п р а ж н е н и е 1. Доказать, что любое бесконечное подмножество счетного множества есть счетное множество.

У п р а ж н е н и е 2. Доказать, что объединение конечного или счетного числа счетных множеств есть счетное множество.

Т е о р е м а 3. *Множество рациональных чисел Q счетно.*

○ Пусть E — множество положительных рациональных чисел.

Это множество состоит из всех несократимых дробей вида p/q, где $p \in N$, $q \in N$. Выпишем подряд все несократимые дроби, у которых сумма числителя p и знаменателя q равна двум, трем, четырем, пяти и т. д. Получим последовательность

$$\underbrace{\frac{1}{1},}_{p+q=2} \quad \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{2}{1},}_{p+q=3} \quad \underbrace{\frac{1}{3}, \frac{3}{1},}_{p+q=4} \quad \underbrace{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1},}_{p+q=5} \quad \underbrace{\frac{1}{5}, \frac{5}{1},}_{p+q=6} \quad \ldots \quad (54)$$

В этой последовательности, состоящей из разных чисел, содержатся все элементы множества E. Обозначим n-й член последовательности (54) через r_n. Тогда все рациональные числа, т. е. все элементы множества Q, содержатся в последовательности

$$0,\ r_1, -r_1,\ r_2, -r_2,\ \ldots,\ r_n, -r_n,\ \ldots$$

Поэтому Q — счетное множество. ●

7. Несчетность множества вещественных чисел. Множество, не являющееся конечным или счетным, называется *несчетным.*

Теорема 4. *Множество вещественных чисел R несчетно.*

○ Докажем, что множество положительных вещественных чисел R_+ несчетно. Предположим противное. Тогда все элементы множества R_+ содержатся в последовательности $\{\alpha_k\}$, где

$$\alpha_k = a_0^{(k)},\ a_1^{(k)} a_2^{(k)} \ldots$$

Покажем, что существует число $\beta = 0, b_1 b_2 \ldots$, не содержащееся в последовательности $\{\alpha_k\}$. Выберем число b_1 так, чтобы $b_1 \neq a_1^{(1)}$, $b_1 \neq 9$, $b_1 \neq 0$. Вообще, для любого $k \in N$ выберем b_k так, чтобы $b_k \neq a_k^{(k)}$, $b_k \neq 9$, $b_k \neq 0$. Тогда $\beta \neq \alpha_k$ при любом $k \in N$. Это противоречит предположению о том, что любое число $\beta \in R_+$ содержится в последовательности $\{\alpha_k\}$. Таким образом, множество R_+ не является счетным, а поэтому и множество R также несчетно. ●

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

1. Показать, что справедливы следующие соотношения:

а) $\rceil(A \wedge B) \Leftrightarrow \rceil A \vee \rceil B$;

б) $\rceil(A \vee B) \Leftrightarrow \rceil A \wedge \rceil B$.

2. Пусть A, B, C — подмножества некоторого множества E. Показать, что:

а) $(A \subset C) \wedge (B \subset C) \Leftrightarrow (A \cup B) \subset C$;

б) $(C \subset A) \wedge (C \subset B) \Leftrightarrow C \subset (A \cap B)$.

3. Пусть X, Y — непустые ограниченные множества вещественных чисел, а E — множество всевозможных чисел вида $x + y$, где $x \in X$, $y \in Y$. Показать, что E — ограниченное множество, причем $\sup E = \sup X + \sup Y$, $\inf E = \inf X + \inf Y$.

4. Пусть X, Y — непустые ограниченные множества неотрицательных вещественных чисел, E — множество всевозможных чисел xy, где $x \in X$, $y \in Y$. Показать,что E — ограниченное множество, причем $\sup E = \sup X \times \times \sup Y$, $\inf E = \inf X \cdot \inf Y$.

5. Пусть X, Y — множества чисел, и пусть E — множество всевозможных чисел вида $x - y$, где $x \in X$, $y \in Y$. Показать, что $\sup E = \sup X - \inf Y$.

6. Пусть X и Y — непустые множества вещественных чисел такие, что:

а) $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ выполняется неравенство $x \leqslant y$;

б) $\forall \varepsilon > 0$ существуют $x_\varepsilon \in X$, $y_\varepsilon \in Y$ такие, что $y_\varepsilon - x_\varepsilon < \varepsilon$.

Показать, что $\sup X = \inf Y$.

7. Пусть $S_n(p) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^p, \quad p \in N$. Доказать, что

$$\sum_{p=1}^{m} C_{m+1}^{p} S_n(p) = (n+1)^{m+1} - (n+1).$$

Пользуясь этой формулой, доказать, что

$$S_n(3) = \sum_{k=1}^{3} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

8. Доказать формулу

$$(x_1 + x_2 + ... + x_p)^n = \sum_{k_1+k_2+...+k_p=n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!...\,k_p!}\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_p^{k_p},$$

где суммирование ведется по всем целым неотрицательным k_1, k_2, ... , k_p таким, что $k_1 + k_2 + ... + k_p = n$.

9. Доказать неравенство

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n},$$

связывающее среднее гармоническое, среднее геометрическое и среднее арифметическое положительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$.