

## ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-ОГО ПОРЯДКА

**1. Дифференциальное уравнение n-го порядка: определение решения, постановка задачи Коши. Формулировка теоремы существования и единственности. Общее и частное решения. Общий и частный интегралы. Методы понижения порядка.**

Дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

где штрих означает дифференцирование по  $x$ . Число  $n$  (порядок старшей производной, входящей в данное уравнение) называется порядком дифференциального уравнения (1), а функция  $F$  определена и непрерывна в некоторой области  $G \subset R^{n+2}$  ( $n \geq 1$ ).

Дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2)$$

в которых старшая производная  $y^{(n)}$  выражается в виде функции от переменных  $x, y$  и производных  $y^{(i)}$  порядков меньше  $n$ . Такие дифференциальные уравнения называются нормальными или разрешенными относительно производной. где функция  $f$  также предполагается непрерывной в некоторой области  $G \subset R^{n+1}$  изменения своих аргументов.

**Определение-1.** Решением дифференциального уравнения (1) называется функция  $y(x)$ , удовлетворяющая условиям:

- 1)  $y(x)$  непрерывно дифференцируема  $n$  раз на  $(a, b)$ ;
- 2)  $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) \in G, \forall x \in (a, b)$ ;
- 3)  $y(x)$  обращает уравнение (1) в тождество  $\forall x \in (a, b)$ .

Аналогично определяется решение уравнения (2).

**Задача Коши для дифференциального уравнения (2):**

задача отыскания решения  $y(x)$ , удовлетворяющего заданным начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}, \quad (3)$$

где  $x_0 \in (a, b)$ ,  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{n-1}$  — заданные числа.

**Теорема Пеано.** Если функция  $f$  непрерывна в области  $G$ , то для любой точки  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{n-1}) \in G$  существует решение уравнения

(2), определенное в некоторой окрестности точки  $x_0 \in (a, b)$ , и удовлетворяющее условиям (3).

Существование и единственность решения задачи Коши определяется следующей теоремой.

**Теорема Коши-Пикара.** Пусть функция  $f$  непрерывна в области  $G$  и имеет непрерывные частные производные  $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{n-1}}$ . Тогда для любой точки  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{n-1}) \in G$  существует единственное решение уравнения (2), определенное в некоторой окрестности точки  $x_0 \in (a, b)$ , и удовлетворяющее условиям (3).

Общим решением дифференциального уравнения (1) называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

зависящая от  $x$  и  $n$  произвольных постоянной  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , которая удовлетворяет следующим двум условиям:

1) при любом допустимом значении постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , она удовлетворяет уравнению (1);

2) каково бы ни были начальные условия  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ , можно найти единственный набор значений  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ , такие, что решение

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$$

удовлетворяет данному начальному условию.

Уравнение

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

задающее общее решение в неявном виде, называется общим интегралом уравнения.

Частным решением уравнения (1) или (2) называется любое решение, получаемое из общего решения при конкретных числовых значениях  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Аналогично вводится понятие частного интеграла.

Если  $y(x)$  решение уравнения (1), то график функции  $y = y(x)$  называется интегральной кривой уравнения (1).

С геометрической точки зрения общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения представляет собой семейство интегральных кривых, зависящих от  $n$  параметра  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Решение уравнения, удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ , будет изображаться определенной кривой этого семейства.

Ниже приводятся некоторые виды дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка, допускающие понижение порядка.

### 3.1. Уравнения вида

$$F(x, y^k, y^{k+1}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (4)$$

т.е. уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка  $k - 1$  включительно. С помощью замены  $y^{(k)} = p(x)$ , где  $p(x)$  — новая неизвестная функция, порядок уравнения понижается на  $k$  единиц:

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Предположим, что для полученного уравнения мы можем найти общее решение  $p(x) = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$ . Общее решение уравнения (4) получается путем  $k$ -кратного интегрирования обеих частей полученного выражения.

**Пример 1.** Найти частное решение уравнения

$$x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1,$$

$$y(1) = 1, y'(1) = 1, y''(1) = ?1.$$

**Решение.** Данное уравнение не содержит  $y$  и  $y'$ . Положим  $y'' = p(x)$ , тогда уравнение первого порядка

$$x^4 p' + 2x^3 p = 1,$$

### 3.2. Уравнения вида

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (5)$$

Уравнение (5) явно не содержит независимую переменную  $x$ . Подстановкой  $y' = p(y)$ , порядок уравнения понижается на единицу.

**Пример 2.** Найти общее решение уравнения

$$y' y''' - 3y''^2 = 0.$$

**Решение.** Пусть  $y' = p(y)$ ,  $y'' = p'p$ ,  $y''' = p''p^2 + p'^2p$ . Тогда уравнение преобразуется к виду  $p''p^3 - 2p'^2p^2 = 0$

Приведя подобные члены и сократив на  $p^2$  (при этом следует учесть те- ряемое решение  $p=0$ , или  $y=c$ ), получим:  $p'p - 2p'^2 = 0$

### 3.3. Уравнения вида

$$\frac{d}{dx} F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0 \quad (6)$$

т.е. уравнения, в которых левая часть может быть представлена как полная производная по  $x$  от некоторой функции  $F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ .  
 12 Интегрируя по  $x$ , получим новое уравнение, порядок которого на единицу ниже порядка исходного уравнения. Такие уравнения называются уравнениями в точных производных.

**Пример 3.** Найти общее решение уравнения

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' - x^3 = 0.$$

**Решение.** Левая часть уравнения есть полная производная по  $x$  от функции

$$(1 + x^2)y' + \frac{x^4}{4},$$

уравнение можно переписать так: '

$$(1 + x^2)y' + \frac{x^4}{4} = C_1,$$

**3.4. Однородные относительно неизвестной функции и ее производных, уравнения**

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (7)$$

т.е. такие, что

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \dots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}),$$

$\lambda > 0$  однородности порядка  $m$ .

Подстановкой  $y' = yz$  порядок уравнения понижается на единицу, где  $z = z(x)$  новая неизвестная функция.

**Пример 4 .** Найти общее решение уравнения

$$xyy'' - xy'^2 - yy' = 0.$$

**Решение.** Проверим однородность уравнения.

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = x\lambda y\lambda y'' - x(\lambda y')^2 - \lambda y\lambda y' = \lambda^2(xyy'' - xy'^2 - yy'),$$

$m = 2$ . Положим  $y' = yz$ , тогда  $y'' = (yz)' = y'z + z'y = yz^2 + yz'$ , или  $y'' = y(z^2 + z')$ .

**2. Линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка и линейный дифференциальный оператор  $n$ -го порядка.**  
**Свойства решений однородного линейного уравнения.**

Уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (8)$$

называется линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка. Здесь функции  $a_i(x), f(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  заданы и непрерывны на интервале  $(a, b)$ .

Если  $f(x) = 0$ , то уравнение (8) называется линейным однородным, если  $f(x) \neq 0$ , то уравнение (8) называется линейным неоднородным, или линейным уравнением с правой частью.

Краткая запись линейного неоднородного уравнения (8) имеет вид  $L(y) = f(x)$ , где  $L$  линейный дифференциальный оператор  $n$ -го порядка, т.е.

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y$$

определенный на множестве  $n$  раз непрерывно дифференцируемых на  $(a, b)$  функций. Краткая запись линейного однородного уравнения соответственно имеет вид  $L(y) = 0$ .

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (9)$$

Здесь функции  $a_i(x), f(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  заданы и непрерывны на интервале  $(a, b)$ .

**Задача Коши для уравнения (9)** задача отыскания решения  $y(x)$ , уравнения (9) удовлетворяющего заданным начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}, \quad (10)$$

где  $x_0 \in (a, b)$ ,  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{n-1}$  — заданные числа.

**Теорема** Пусть функции  $a_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  заданы и непрерывны на интервале  $(a, b)$ . Тогда существует единственное решение задачи Коши для уравнения (9), определенное на интервале  $(a, b)$ .

Общие свойства решений такого уравнения даны в следующих теоремах.

**Теорема.** Если функции  $y_1, y_2, \dots, y_m$  являются решениями однородного линейного Дифференциального уравнения (9), то и любая линейная комбинация этих функций является решением, то есть решением является функция

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots C_m y_m,$$

$C_1, C_2, \dots, C_m$  — произвольные постоянные.

### 3. Определитель Вронского системы функций, его свойства. Фундаментальная система решений, общее решение

#### Линейно независимые функции.

**Определение.** Функции  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ , непрерывные на интервале  $(a, b)$ , называются линейно зависимыми на  $(a, b)$ , если существуют постоянные  $C_1, C_2, \dots, C_m$ , не все равные нулю, такие, что

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots C_m y_m = 0$$

на  $(a, b)$ . В противном случае функции  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ , называются линейно независимыми на  $(a, b)$ . Иными словами, непрерывные функции  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ , линейно независимы на интервале  $(a, b)$ , если из тождества

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots C_m y_m = 0$$

следует, что  $C_i = 0$  для всех  $i = 1, 2, \dots, m$ .

**Определитель Вронского** Определителем Вронского для функций  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ , называется определитель вида

$$W(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \dots & \varphi_m(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) & \dots & \varphi_m'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(m-1)}(x) & \varphi_2^{(m-1)}(x) & \varphi_3^{(m-1)}(x) & \dots & \varphi_m^{(m-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Необходимое и достаточное условие линейной независимости функций

**Теорема 1.** Пусть  $W(x) \neq 0$  на  $(a, b)$ . Тогда функции  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$  линейно независимы на интервале  $(a, b)$ .

2. Если функции  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$  линейно зависимы, то  $W(x) = 0$  на  $(a, b)$ .

Отметим, что если  $W(x) = 0$  на  $(a, b)$ , то функции  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$  могут быть как линейно зависимыми, так и линейно независимыми.

**Пример.** Рассмотрим следующие линейно независимые функции  $\varphi_1(x) = x^2$ ,  $\varphi_2(x) = x|x|$ . Для них определитель Вронского имеет вид

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что  $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = 0$ .

Для решений уравнения (9) имеет место следующая теорема

**Теорема** Для того чтобы решения уравнения (9)  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ , были линейно независимыми на интервале  $(a, b)$  необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского для этих решений, не был равен нулю хотя бы в одной точке интервала  $(a, b)$ .

**Определение 1** Набор  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ , состоящий из  $n$  линейно независимых решений уравнения (9), называется фундаментальной системой решений уравнения (9).

**Теорема** Линейное однородное уравнение (9) имеет фундаментальную систему решений.

**Док-во.** Возьмем любой числовой определитель  $n$ -го порядка, не равный нулю Пусть  $A = \{a_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ - произвольная квадратная матрица порядка  $n$ , такая, что  $\det A \neq 0$ . Возьмем произвольную точку  $x_0 \in (a, b)$ , и поставим  $n$  задач Коши для уравнения (9):

$$x = x_0, y(x_0) = a_{1k}, y' = a_{2k}, y'' = a_{3k}, \dots, y^{n-1} = a_{nk}$$

$k = 1, 2, \dots, n$ .

Пусть  $y_k(x)$ — решение  $k$ -ой задачи Коши. Составим вронскиан для системы функций  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  на  $(a, b)$ .

По нашему выбору задач Коши  $W(x_0) = \det A \neq 0$ . По вышеприведенной теореме решения  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  на  $(a, b)$  линейно независимы на  $(a, b)$ , то есть образуют фундаментальную систему решений. Теорема доказана.

**Теорема** Любые  $n + 1$  решений линейного однородного уравнения (9) линейно зависимы.

**Доказательство.** Пусть функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_{n+1}(x)$  являются решениями уравнения (9). Для действительных чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$$

рассмотрим функцию

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) + \alpha_{n+1} y_{n+1}(x),$$

которая также является решением. Предположим, что эта функция равна нулю:

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) + \alpha_{n+1} y_{n+1}(x) = 0.$$

Дифференцируя это равенство  $n - 1$  раз получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) + \alpha_{n+1} y_{n+1}(x) &= 0 \\ \alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) + \dots + \alpha_n y_n'(x) + \alpha_{n+1} y_{n+1}'(x) &= 0 \\ \alpha_1 y_1''(x) + \alpha_2 y_2''(x) + \dots + \alpha_n y_n''(x) + \alpha_{n+1} y_{n+1}''(x) &= 0 \\ \dots &= 0 \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) + \alpha_{n+1} y_{n+1}^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Теперь положим  $x = x_0$  в этой системе и в результате получим относительно неизвестных

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$$

следующую систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) + \alpha_{n+1} y_{n+1}(x_0) &= 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \dots + \alpha_n y_n'(x_0) + \alpha_{n+1} y_{n+1}'(x_0) &= 0 \\ \alpha_1 y_1''(x_0) + \alpha_2 y_2''(x_0) + \dots + \alpha_n y_n''(x_0) + \alpha_{n+1} y_{n+1}''(x_0) &= 0 \\ \dots &= 0 \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) + \alpha_{n+1} y_{n+1}^{(n-1)}(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

В этой системе  $n + 1$  неизвестных и  $n$  уравнений. Поэтому эта система имеет бесконечно много решений, в том числе нетривиальные решения. Пусть

$$\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0, \alpha_{n+1}^0$$

нетривиальное решение. В этом случае среди чисел

$$\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0, \alpha_{n+1}^0$$

есть отличные от нуля. Для действительных чисел

$$\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0, \alpha_{n+1}^0$$



рассмотрим функцию

$$y(x) = \alpha_1^0 y_1(x) + \alpha_2^0 y_2(x) + \dots + \alpha_n^0 y_n(x) + \alpha_{n+1}^0 y_{n+1}(x),$$

которая также является решением. Кроме того это решение удовлетворяет условиям.

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{n-1}(x_0) = 0$$

Этим условиям удовлетворяет и нулевое решение и по теореме единственности имеем  $y(x) = 0$  на  $(a, b)$ . Отсюда вытекает, что решения  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_{n+1}(x)$  линейно зависимы.

**Теорема** Множество вещественных решений линейного однородного уравнения (9) является линейным пространством размерности  $n$  над полем вещественных чисел.

**Теорема** Пусть функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ , образует фундаментальную систему решений уравнения (9). Тогда общее решение этого уравнения есть

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — произвольные постоянные.

#### 4. Свойства решений неоднородного линейного уравнения

Теперь рассмотрим неоднородное линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (11)$$

Здесь функции  $a_i(x), f(x), i = 1, 2, \dots, n$  заданы и непрерывны на интервале  $(a, b)$ .

Краткая запись линейного неоднородного уравнения (8) имеет вид  $L(y) = f(x)$ , где  $L$  линейный дифференциальный оператор  $n$ -го порядка, т.е.

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y$$

**Теорема.** Общее решение неоднородного уравнения является суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$y_o(x) = y_{oo}(x) + y_{pn}(x) \quad (12)$$

где  $y_o(x)$ — общее решение неоднородного уравнения,  $y_{oo}(x)$ — общее решение однородного уравнения,  $y_{pn}(x)$ — частное решение неоднородного уравнения.

**Доказательство.** Покажем, что функция (12) удовлетворяет уравнению (11.)

$$L(y_o(x)) = L(y_{oo}(x)) + L(y_{pn}(x)) = 0 + f(x) = f(x). \quad (13)$$

Теперь покажем, что любое решение уравнения (11) имеет вид (12). Пусть  $\varphi(x)$ — решение уравнения (11.) Для этого проверим, что разность двух решений неоднородного уравнения (11) является решением однородного уравнения:

$$L(\varphi(x) - y_{pn}(x)) = L(\varphi(x)) - L(y_{pn}(x)) = f(x) - f(x) = 0.$$

Таким образом, функция  $\varphi(x) - y_{pn}(x)$  является решением однородного уравнения и содержится в семействе  $y_{oo}(x)$ , а функция  $\varphi(x)$ — как решение уравнения (11), содержится в  $y_o(x)$

### Рекомендуемая литература

1. Бухарова Т.И. и др. Курс лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: НИЯУ МИФИ, 2011.
2. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М., 2004.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., 2004.

Ташкентский филиал Российского Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". август 2023