**Профессор А.Я.Нарманов Ташкентский филиал МИФИ**

## Вариационное исчисление:

Дифференцируемость функционала.

Первая вариация функционала.

Экстремум функционала.

Необходимое условие экстремума функционала с закрепленными концами.

## 1Дифференцируемость функционала. Первая вариация функционала.

Пусть $X-$линейное нормированной пространство с нормой $||x||$, $x \in X$. Тогда функция

$$\rho(x,y) = ||x-y|| \tag{1}$$

определяет расстояние на $X$.

Напомним, что Нормированное пространство Ч линейное (векторное) пространство с заданной на нчм нормой; один из основных объектов изучения функционального анализа. Более точно: нормированным пространством называется пара $(X, ||\cdot||)$ из векторного пространства $X$ над полем действительных или комплексных чисел и отображения $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ таких, что выполняются следующие свойства для любых $x, y \in X$ и скаляра $\lambda$

1) $||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (положительная определенность)

2) $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$ (однородность)

3) $||x+y|| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)

Норма является естественным обобщением понятия длины вектора в евклидовом пространстве, таким образом, нормированные пространства – векторные пространства, оснащенные возможностью определения длины вектора.

Примером линейного нормированного пространства является пространства $C^1[a,b]$ непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$ с нормой

$$||x|| = max\{|x(t)| : a \leq t \leq b\} + max\{|x'(t)| : a \leq t \leq b\}$$

где штрих означает дифференцирование по $t$.

Пусть $M-$ некоторое подмножество линейного нормированного пространства $X$. Отображение

$$J : M \to R \tag{2}$$

называется функционалом.

Определенный интеграл

$$J(y) = \int_a^b y(x)dx \tag{3}$$

является функционалом, заданным на множестве непрерывных функций

$$M = \{y \in C[a,b] : y(a) = A, y(b) = B\}. \tag{4}$$

## ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Расстояние на линейном нормированном пространстве $C^1[a,b]$ вводится следующим образом

$$\rho(y_1, y_2) = max\{|y_1(x) - y_2(x)| : a \leq x \leq b\} + max\{|y_1'(x) - y_2'(x)| : a \leq x \leq b\} \tag{5}$$

Пусть $F(x, y, p)-$ некоторая непрерывно дифференцируемая функция,определенная для всех $x \in [a,b]$ $(y,p) \in R^2$.

Рассмотрим интеграл

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx \tag{6}$$

на множестве непрерывно дифференцируемых функций

$$M = \{y \in C^1[a,b] : y(a) = A, y(b) = B\}. \tag{7}$$

**Определение.** Функция $\widetilde{y}(x)$, принадлежащая множеству $M$, дает локальный минимум функционала (6), если существует такое число $\varepsilon > 0$ что для всех функций $y(x)$, таких,что $\rho(y, \widetilde{y} < \varepsilon$ имеет место

$$J(y) \geq J(\widetilde{y})$$

**Определение.** Функция $\widetilde{y}(x)$, принадлежащая множеству $M$, дает локальный максимум функционала (6), если существует такое число $\varepsilon > 0$ что для всех функций $y(x)$, таких,что $\rho(y, \widetilde{y} < \varepsilon$ имеет место

$$J(y) \leq J(\widetilde{y})$$

**Определение.** Задача нахождения локального экстремума функционала (6) называется простейшей задачей вариационного исчисления

Эта задача также называется задачей с закрепленными концами.

Обозначим через $\dot{C}^1[a,b]$ множество функций из класса $C^1[a,b]$, для которых $y(a)=0, y(b)=0$. Если функция $y(x)$ принадлежит множеству $M$ , то для каждой функции $h \in \dot{C}^1[a,b]$ сумма $y+\alpha h$, где $\alpha-$ действительное число, также принадлежит множеству $M$. Поэтому мы можем рассмотреть интеграл

$$J(y+\alpha h)=\int_a^b F(x, y(x)+\alpha h(x), y'(x)+\alpha h'(x))dx. \tag{8}$$

При фиксированных функций $y, h$ интеграл (8) является функцией от $\alpha$.Подинтегральная функция дифференцируема по $\alpha$, поэтому функция

$$\Phi(\alpha)=J(y+\alpha h$$

является дифференцируемой функцией. Находим ее производную в точке $\alpha=0$.

$$\frac{dJ(y+\alpha h)}{d\alpha}_{\alpha=0}=\int_a^b\{\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y}h(x)+\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'}h'(x)\}dx \tag{9}$$

**Определение** Производная

$$\frac{dJ(y+\alpha h)}{d\alpha}_{\alpha=0}$$

называется первой вариацией функционала и обозначается через $\delta J(y,h)$. Как выше показали первая вариация имеет вид

$$\delta J(y,h)=\int_a^b\{\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y}h(x)+\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'}h'(x)\}dx \tag{10}$$

Теорема о необходимом условии решения простейшей задачи вариационного исчисления.

**Теорема** Если функция $\widetilde{y}(x)$ является решением простейшей задачи вариационного исчисления, то $\delta J(\widetilde{y},h)=0$.

**Доказательство.** Предположим, что функция $\widetilde{y}(x)$ дает локальный минимум функционала (6).Это означает,что существует такое $\varepsilon>0$ , что $J(\widetilde{y}+\eta)\geq J(\widetilde{y})$ для функций $\eta\in\dot{C}^1[a,b]$ для которых $||\eta||<\varepsilon$.

Положим $\eta=\alpha h$, где $h\in\dot{C}^1[a,b]$, $\alpha\in R$. Тогда $\widetilde{y}+\eta\in M$ и $||\eta||<\varepsilon$ для малых $\alpha\in R$. По условиям теоремы мы имеем $\Phi(\alpha)=J(\widetilde{y}+$

$\eta) \geq J(\widetilde{y}) = \Phi(0)$. Таким образом дифференцируемая функция $\Phi(\alpha)$ достигает минимума при $\alpha = 0$. Значит $\Phi'(0) = 0$. Следовательно мы имеем $\delta J(\widetilde{y}, h) = 0$. Теорема доказана.

**2. Уравнения Эйлера- Лагранжа для решения простейшей задачи вариационного исчисления**

Выражение для первой вариации изменим путем интегрирования по частям второго члена в (10).

$$\int_a^b \frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} h'(x)dx = \frac{\partial F}{\partial y'} h(x)|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} h(x)dx \qquad (11)$$

Учитывая равенство $\frac{\partial F}{\partial y'} h(x)|_a^b = 0$ мы получим следующее выражение для первой вариации

$$\delta J(y, h) = \int_a^b \{\frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y'}\} h(x)dx \qquad (12)$$

**ОСНОВНАЯ ЛЕММА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

**Лемма.** Пусть $f \in C^1[a, b]$ и для каждой функции $h \in \dot{C}^1[a, b]$ имеет место

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0. \qquad (13)$$

Тогда $f(x) = 0$ для всех $x \in [a, b]$.

**Доказательство.** Предположим обратное. Пусть существует $x_0 \in [a, b]$ такая, что $f(x_0) \neq 0$. Для определенности предположим, что $f(x_0) > 0$. Тогда по непрерывности функции существует такое $\varepsilon > 0$, что $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Положим

$$h(x) = [x - (x_0 - \varepsilon)]^2 [x - (x_0 + \varepsilon)]^2, x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \qquad (14)$$

$$h(x) = 0, x \notin [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$

Эта функция принадлежит классу $\dot{C}^1[a, b]$. Вычислим интеграл

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)h(x)dx \geq \frac{1}{2} f(x_0) \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} h(x)dx > 0. \qquad (15)$$

Это противоречие доказывает лемму.

Используя эту лемму докажем следующую теорему.

**Теорема**. Пусть $F(x,y,p)-$ дважды непрерывно дифференцируемая функция,определенная для всех $x \in [a,b]$, $(y,p) \in R^2$. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\widetilde{y}(x)$ является решением простейшей задачи вариационного исчисления, то функция $\widetilde{y}(x)$ удовлетворяет следующщему уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'} = 0 \qquad (16)$$

**Доказательство.**

Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\widetilde{y}(x)$ является решением простейшей задачи вариационного исчисления, то по теореме-1 для первой вариации имеет место равенство

$$\delta J(y,h) = \int_a^b \{\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'}\}h(x)dx = 0 \quad (17)$$

для любой функции $h \in \dot{C}^1[a,b]$. Тогда по основной лемме мы получим

$$\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'} = 0 \qquad (18)$$

Полную производную

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'} \qquad (19)$$

напишем в следующем виде

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial^2 F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'\partial x} + \frac{\partial^2 F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'\partial y}y' + \frac{\partial^2 F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'^2}y''. \qquad (20)$$

Уравнение (18) имеет следующий вид

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'\partial x} - \frac{\partial^2 F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'\partial y}y' - \frac{\partial^2 F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'^2}y'' = 0. \qquad (21)$$

Если

$$\frac{\partial^2 F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'^2} \neq 0, \qquad (22)$$

то уравнение Эйлера является дифференциальным уравнением второго порядка.

Поэтому решения этого уравнения представляют двухпараметрическое семейство $y(x, C_1, C_2)$. Произвольные постоянные $C_1, C_2)$ находят из условий $y(a, C_1, C_2) = A$, $y(b, C_1, C_2) = B$.

**Примеры**

**1. Задача о брахистохроне**

Определить кривую в вертикальной плоскости,соединяющую точки $A$ и $B$ , при движении по которой материальная точка под действием силы тяжести скатится из точки $A$ в точку $B$ в кратчайшее время (трение и сопротивлены среды не учитывается).

**Решение** Начало координат $O$ разместим в точку $A$, ось $Oy$ направим вертикально вниз, ось $Ox$ направим горизонтально. Скорость материальной точки равна $v = \frac{ds(x)}{dt} = \sqrt{2gy}$. Отсюда получим,что

$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$

В результате для времени пути точки материальной получим следующее выражение

$$t(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^l \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx. \qquad (23)$$

Мы должны найти минимум функционала (23) с закрепленными концами: $y(0) = O$ $y(l) = B$.

Уравнение Эйлера -Лагранжа имеет следующий вид

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = 0.$$

После некоторого упрощения это уравнение можно привести к виду

$$y(1+y'^2) = C_1$$

Для решения этого уравнения введем параметр $p$ полагая $y' = tgp$.

Получим

$$y = C_1 sin^2 p = C_1(1 - cos^2 p)$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 2cospsinp}{ctgt} = 2C_1 sin^2 p = C_1(1 - cos2p)$$

$$x = C_1(p - \frac{1}{2} sin2p + C_2 = \frac{1}{2}(2p - sin2p) + C_2$$

Из условий$x(0) = 0, y(0) = 0$ получим, что $C_2 = 0$. Постоянная $C_1$ находится из условия $y(l) = B$. Таким образом решение уравнения Эйлера в параметрической форме задается уравнениями

$$x = C_1(t - \frac{1}{2} sin 2p + C_2 = \frac{1}{2}(2p - sin 2p) + C_2$$

$$y = C_1(1 - cos^2 p).$$

Кривая определяемая этими уравнениями называется циклоидой.

Теперь вернемся к уравнению Эйлера (21).

1. Как отметили, если

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0, \tag{24}$$

то уравнение Эйлера является дифференциальным уравнением второго порядка. В общем случае это уравнение интегрируется явно не всегда.

Отметим случаи, когда это уравнение интегрируется явно.

2.Случай $F = F(x, y)$, т.е. функция $F$ не зависит от $y'$. В этом случае уравнение Эйлера примет вид

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{25}$$

Это уравнение не является дифференциальным уравнением. Поэтому вариационная задача не имеет решений.

3. Случай $F = F(x, y')$, т.е. функция $F$ не зависит от $y$. В этом случае уравнение Эйлера примет вид

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} = 0. \tag{26}$$

Следовательно, имеем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = C \tag{27}$$

4. Случай $F = F(y, y')$, т.е.функция $F$ не зависит от $x$. В этом случае уравнение Эйлера примет вид

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F(x, y(x), y'(x))}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 F(x, y(x), y'(x))}{\partial y'^2} y'' = 0. \tag{28}$$

Умножение уравнения на $y'$ дает полный дифференциал

$$\frac{d}{dx}(F - y'\frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y'}) = 0. \quad (29)$$

Следовательно имеем имеем дифференциальное уравнение первого порядка

$$F - y'\frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} = C \quad (30)$$

## Рекомендуемая литература

1. Бухарова Т.И. и др. Курс лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: НИЯУ МИФИ, 2011.

2. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М., 2004.

3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., 2004.