**Решение общих линейных уравнений гиперболического типа**

**1. Сопряжённые дифференциальные операторы.**  Установим некоторые вспомогательные формулы, нужные нам для представления решений краевых задач в интегральной форме. Пусть

 (1)

линейный дифференциальный оператор, соответствующий линейному уравнению гиперболического типа, где , ,  дифференцируемые функции. Умножая  на некоторую функцию , запишем отдельные слагаемые в виде

, ,

, , .

Суммируя отдельные слагаемые, получаем:

, (2)

где

, (3)

 (4) , (41)

 (5) . (51)

 Два дифференциальных оператора называются сопряжёнными, если разность



является суммой частных производных по  и  от некоторых выражений  и .

 Рассматриваемые нами операторы  и , очевидно, являются сопряжёнными.

 Если , то оператор  называется самосопряжённым.

 Двойной интеграл от разности  по некоторой области , ограниченной кусочно-гладким контуром , равен

, (6)

где  и  – произвольные дважды дифференцируемые функции (двумерная формула Грина)[[1]](#footnote-1).

 **2. Интегральная форма решения**. Воспользуемся формулой (6) для решения следующей задачи:

 *найти решение линейного уравнения гиперболического типа*

, (7)

*удовлетворяющее начальным условиям на кривой* ,

,

 (71)

( – производная по направлению нормали к кривой ), *и выяснить ту область, в которой решение определяется условиями* (71).

 Кривая  задана при этом уравнением

,

где  – дифференцируемая функция. Наложим на кривую  условие, чтобы всякая характеристика семейств  и пересекала кривую  не более одного раза (для этого надо, чтобы ). Формула (6) для криволинейного треугольника , ограниченного дугой , кривой  и отрезками характеристик  и  (см. рисунок), дает:



 

.

Преобразуем первые два интеграла, взятые вдоль характеристик  и . Принимая во внимание, что



и пользуясь формулами (4) и (5), получим:





и аналогично

.

Отсюда и из формулы (6) следует:



. (8)

 Эта формула является тождеством, верным для любых достаточно гладких функций  и .

 Пусть  – решение поставленной выше задачи с начальными условиями, а функция  зависит от точки  как от параметра и удовлетворяет следующим требованиям:

 внутри  (9)

и

 (9а)

.

Из условий на характеристиках и последнего условия находим:

 на ,

 на ,

где  – значение  в точке . Как мы видели в задаче Гурса, уравнение (9) и значения функции  на характеристиках  и  полностью определяют ее в области . Функцию  часто называют *функцией Римана*.

 Таким образом, формула (8) для функции , удовлетворяющей уравнению (7), принимает следующий окончательный вид:



. (10)

Эта формула решает поставленную задачу, так как выражения, стоящие под знаком интеграла вдоль , содержат функции, известные на дуге . В самом деле, функция  была определена выше, а функции

 ,

,



вычисляются при помощи начальных данных.

 Формула (10) показывает, что если начальные данные известны на дуге , то они полностью определяют функцию в характеристическом , если функция  известна в этой области[[2]](#footnote-2)1).

Формула (10), полученная в предположении существования решения, определяет его через начальные данные и правую часть уравнения (7) и тем самым по существу доказывает единственность решения.

 Можно показать, что функция , определяемая формулой (10), удовлетворяет условиям задачи (7) – (71). Однако мы на этом доказательстве не останавливаемся.

 **3. Физическая интерпретация функции Римана.** Выясним физический смысл функции . Для этого найдём решение неоднородного уравнения



с нулевыми начальными условиями на кривой . Обращаясь к формуле (10), видим, что искомое решение имеет вид

. (11)

Предположим, что  – локальная функция точки , равная нулю всюду, кроме малой окрестности  точки , и удовлетворяющая условию нормировки

. (12)

Формула (11) в этом случае принимает вид

. (13)

Пользуясь теоремой о среднем значении, можно написать:

,

где  – некоторая точка области .

 Стягивая окрестность  в точку , находим:

. (14)

Функция , как мы видели на ряде примеров, обычно является плотностью силы, а переменная  – временем. Выражение

 (15)

представляет собой импульс силы. Отсюда в силу формулы (11) заключаем, что  является функцией влияния единичного импульса, приложенного в точке . Функция



была определена как функция параметров , удовлетворяющая по координатам  точки  уравнению

 (16)

с дополнительными условиями (9а).

Рассмотрим функцию

,

являющуюся функцией параметров  и удовлетворяющую по координатам  точки  уравнению

 (17)

с дополнительными условиями (см. на рисунок)

 (18)

Из этих условий находим:

 (19)

.

 Уравнение (17) и условия (18) полностью определяют функцию  в четырехугольнике , ограниченном отрезками характеристик  и .

 Применяя формулу (6) к четырехугольнику , получаем:



(переменная точка интегрирования в ). Пользуясь формулами (4) и (5) для  и  и условиями (9а) на характеристиках для функции , нетрудно вычислит первые два интеграла правой части

,

,

подобно тому как это было сделано при выводе формулы (10).

 Аналогично, пользуясь равенствами (41), (51) и условиями (19) для функции  на характеристиках, находим:





,

.

Суммируя все эти четыре равенства, получаем:



или

, (20)

так как

.

Таким образом, мы видим, что  – функцию влияния единичного импульса, сосредоточенного в точке , можно определить как решение уравнения



с дополнительными условиями (18).

**4. Уравнения с постоянными коэффициентами.** В качестве первого примера применения формулы (10) рассмотрим задачу с начальными данными для уравнения колебаний струны:

,

, .

 В формуле (10) дуга  является отрезком оси .

 Оператор



является самосопряженным, поскольку

.

 Так как  и , то функция  на характеристическах  и  равна единице. Отсюда следует, что



для любой точки  внутри треугольника .

 Учитывая затем, что в нашем случае

 на ,

получаем:

.

 Замечая, что , , где  и  –

координаты точки , и пользуясь начальными условиями, будем иметь:



.

Возвращаясь к переменным  и , получаем формулу Даламбера

 



с которой мы уже встречались в предыдущих параграфах.

 В качестве второго примера рассмотрим задачу с начальными условиями для уравнения с постоянными коэффициентами

 (21)

( – постоянные числа),

, (22)

. (23)

Подстановка

 (24)

позволяет привести уравнение (21) к более простому виду

 (25)

с дополнительными условиями

, (221)

 , (231)

если только выбрать параметры  и  соответствующим образом, полагая

. (26)

 Определение функции  по начальным данным и уравнению (25) сводится к построению функции Римана .

 Функция  должна удовлетворять условиям:

, (27)

 (28)

 Будем искать  в виде

 (29)

где

 или . (30)

 На характеристиках  и  переменная  обращается в нуль, так что . Далее, левая часть уравнения (27) преобразуется следующим образом:

.

Дифференцируя выражение для  дважды,  и , получим:

, ,

, .

Отсюда и из формулы (30) находим:

.

Уравнение для  принимает следующий вид:



при условии . Решением этого уравнения является функция Бесселя нулевого порядка



или

. (31)

Воспользуемся теперь для нахождения  формулой (10), которая в нашем случае принимает вид

. (32)

Вычислим предварительно интеграл по отрезку :



. (33)

Пользуясь начальными условиями (221), (231), находим:





, (34)

откуда в силу (24), (221) и (231) получаем формулу







, (35)

дающую решение поставленной задачи.

 Рассмотрим частный случай , т.е. уравнение

.

Из формулы (35) сразу получаем:



. (36)

Полагая здесь  и , приходим к формуле Даламбера

, (37)

дающей решение уравнения колебаний струны

.

при начальных условиях

, , .

1. Б.М. Будак, С.В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965. [↑](#footnote-ref-1)
2. 1 Если характеристика пересекает кривую  в двух точках  и  (см. рисунок), то значение  не может задаваться произвольно, а определяется по формуле (10) с начальными данными на дуге  и значениями  в . [↑](#footnote-ref-2)