**ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ**

 **1. Постановка задачи на собственные значения.** Рассмотрим следующую линейную однородную краевую задачу для уравнения эллиптического типа:

, (1)

. (2)

 Предполагаем, что

 (3)

Пусть  – та часть , где  и  одновременно.

 Задача (1) – (2) состоит в нахождении функции  класса , удовлетворяющей уравнению (1) в области  и граничным условиям (2) на границе . Очевидно, задача (1) – (2) всегда имеет нулевое решение. Это решение не представляет интереса. Поэтому задачу (1) – (2) необходимо рассматривать как задачу на собственные значения для оператора

.

К области определения  оператора  отнесем все функции  класса , удовлетворяющие граничному условию (2) и условию .

 Итак, задача (1) – (2) состоит в нахождении тех значений (*собственных значений* оператора ), при которых уравнение

 (4)

имеет ненулевые решения  из области определния  (*собственные функции*, соответствующие этому собственному значению).

 **Замечание.** Собственние функции гладкости  существуют не всегда. Поэтому в некоторых задачах требование гладкости ослабляется. Это естественно для краевых задач I рода (не содержащих ). Для остальных краевых задач под  на  понимают так называемую правильную нормальную производную.

 **2. Формулы Грина.** Если  и , то справедлива первая формула Грина:

. (5)

 Для доказательства формулы (5) возьмем произвольную область  с кусочно-гладкой границей , строго лежащую в области  . Так как , то иследовательно,

 

.

Пользуясь теперь формулой Гаусса – Остроградского, получаем

.

Устремляя в полученном равенстве  к  и пользуясь тем, что  и  заключаем, что предел правой части существует и, следовательно, существует предел левой части и справедливо равенство (5). При этом интеграл слева в (5) необходимо понимать как несобственный.

 Если  и , то справедлива вторая формула Грина:

 . (6)

Для доказательства формулы (6) в первой формуле Грина (5) поменяем местами  и  :



и вычтем полученное равенство из равенства (5). В результате получим вторую формулу Грина (6).

 В частности, при  формулы Грина (5) и (6) превращаются в следующие :

, (7)

. (8)

1. **Свойства оператора .** Оператор **** эрмитов:

.(9)

 Действительно, так как функции **** и  принадлежат области **,** то  и  и вторая формула Грина (6) при  и  принимает вид

. (10)

 Далее, функции  и  удовлетворяют граничному условию (2) :

, . (11)

По предположению (3)  на . Поэтому однородная система линейных алгебраических уравнений (11) имеет ненулевое решение , и, значит, ее определитель равен нулю, т.е.

.

Учитывая полученное равенство, из формулы (10) получаем равенство (9), которое и означает, что оператор  эрмитов.

 Пусть . Полагая в первой формуле Грина (5)  и  и учитывая, что , получаем

. (12)

Из граничного условия (2) следует, что

, если ;

, если .

Поставляя эти соотношения в равенство (12), получаем выражение для квадратичной формы:

, (13)

где  – та часть , где  и .

 Квадратичная форма , называется *интегралом энергии.*

 В силу предположений (3) в правой части (13) все три слагаемых неотрицательны. Поэтому, отбрасыбая второе и третье слагаемые и оценивая снизу первое слагаемое, получаем неравенство

,

т.е

, (14)

где ; в силу непрерывности и положительности функции  на , .

 Из неравенства (14) вытекает, что *оператор  – положительный*, т.е.

. (15)

Отсюда, в частности, опять следует эрмитовость оператора .

 **4. Свойства собственных значений и собственных функций оператора** .

 *Все собственные значения оператора  неотрицательны.* Это утверждение вытекает из положительности оператора.

 *Собственные функции оператора , соответствующие различным и собственным значениям, ортогональны.*

 Это утверждение вытекает из эрмитовости оператора . *Собственные функции оператора  можно выбрать вещественными.*

 Это утверждение вытекает из вещественности оператора . Действительно, пуст  – вещественное собственное значение и  – соответствуюшая собственная функция оператора ,

. (16)

 Тогда, отделяя в равенстве (16) вещественную и мнимую части, получаем, что отличние от нуля вещественная и мнимая части собственной функции  также являются собственными функциями, соответствующими собственному значению .

**Лемма.** *Для того чтобы  было собственным значением оператора , необходимо и достаточно, чтобы  и . При этом  – простое собственное значение и  – соответствующая собственная функция.*

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  собственное значение оператора  и  соответствующая собственная функция, так что , . Применяя к функции  формулу (13), получаем

,

откуда, учитывая предположения (3), выводим

,

т.е.  и . Из граничного условия (2) для собственной функции  следует, что . Необходимость условий доказана. При этом установлено, что  – единственная собственная функция, соответствующая собственному значению  т.е. это собственное значение – простое.

**Достаточность.** Если  и , то, в силу (3),  и задача (1) – (2) превращается в следующую:

 ,

для которой  есть собственная функция, соответствующая собственному значению . Лемма доказана.

 При  будем считать, что в граничном условии (2) либо , либо , т.е. это условие имеет вид

либо , либо . (17)

Тогда, если граница  области  – достаточно гладкая поверхность и коэффициенты  и  достаточно гладкие функции, справедлива следующая

 **Теорема 1.** *Множество собственных значений оператора  счетно и не имеет конечных предельных точек; каждое собственное значение имеет конечную кратность. Всякая функция из  разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям оператора .*

 Эта теорема будет доказана для двух частных случаев: 1) для задачи Штурма – Лиувилля и 2) для задачи Дирихле. Доказательство этой теоремы в ее общем виде содержится в книгах К. Миранды, В.П. Михайлова, О.А. Ладыженской[[1]](#footnote-1).

На основании приведенной теоремы и предыдущих утверждений все собственные значения оператора  можно перенумеровать в порядке возрастания их величины:

, (18)

повторяя в этом ряде  столько раз, какова его кратность. Соответствующие собственные функции обозначим через , так что в ряде (18) каждому собственному значению  соответствует одна и только одна собственная функция ,

.

При этом собственные функции  можно выбрать вещественными и ортонормальными, так что

.(19)

Далее, всякая функция  из  разлагается в ряд Фурье по ортонормальной системе ,

, (20)

и этот ряд сходится регулярно на . Но  плотно в . Отсюда вытекает следующая

 **Теорема 2.** *Система собственных функций оператора  полна в .*

 Пусть . Умножая ряд (20) скалярно слева на  и учитывая, что , получаем формулу для интеграла энергии



. (21)

 Теперь установим следующий вариационный принцип:

 , (22)

причем infimum в (22) достигается на любой собственной функции, соответствующей собственному значению .

 Действительно, пользуясь формулой (21) для квадратичной формы  и учитывая неравенства (18): , при всех  таких, что  , получаем

.

Но, в силу теоремы 2, справедливо равенство Парсеваля

,

и потому

.

С другой стороны, при , в силу (19), имеем

.

Этим установлена справедливость вариационного принципа (22).

 Полагая в (22) , получаем, в частности,

 .

Применяя формулу (21) к функциям

 ,

из  и учитывая, что



получаем

.

Отсюда и из сходимости ряда (21) следует, что

 . (23)

Применяя неравенство (14) к функциями  и учитывая (23), получаем при 

 

.

Полученное соотношение означает, что

, (24)

причем ряд (24) сходится к  в .

 Итак, получена следующая

 **Теорема 3*.*** *Если , то ряд (20) можно дифференцировать почленно по  один раз и полученные ряды (24) будут сходиться к  в .*

 **Замечание.** Полученные результаты соответственно распространяются и на краевую задачу на собственные значения для уравнения , где вес  – непрерывная функция на , если эту задачу рассматривать в пространстве .

 **5. Физический смысл собственных значений и собственных функций.** При  и  задача на собственные значения (1) – (2) принимает вид

. (25)

 Как известно[[2]](#footnote-2), собственные значения задачи (25) определяют уровни энергии квантовой частицы, движущейся во внешнем силовом поле с потенциалом (потенциальная яма)





Соответствующие собственные функции являются волновыми функциями стационарного оператора Шредингера,

. (26)

 Собственные значения оператора  определяют собственные частоты колебаний ограниченных областей (объёмов, мембран, струн, стержней и т.д.), а соответствующие собственные функции – амплитуды гармонических колебаний.

 Наименьшее собственное значение стационарного оператора переноса определяет также критичность ядерного реактора, а соответствующая собственная функция – плотность нейтронов в реакторе в критическом состоянии.

 **6. Единственность решения неоднородной краевой задачи.** Рассмотрим неоднородную краевую задачу

 (27)

в классе .

 *Если  или , то решение краевой задачи (27) единственно в классе .*

 Действительно, если  – другое решение задачи (49), то их разность  принадлежит  и удовлетворяет однородному уравнению , т.е. является собственной функцией оператора , соответствующей собственному значению . Но тогда, по лемме,  и  вопреки предположению. Следовательно, , что и утверждалось.

 **7. Упражнения.** а) Доказать следующий принцип максимума: если функция  класса  удовлетворяет в ограниченной области  дифференциальному неравенству

,

то либо  в , либо  принимает свой (положительный) максимум в  на границе .

 b) Пользуясь а), доказать: если функция  есть решение краевой задачи

, (28)

то справедливо неравенство

.

 с) Пользуясь b), доказать единственность решения задачи (28) в классе  и его непрерывную зависимость от  и  в норме  (при условии ).

 d) Доказать, что решение краевой задачи



единственно в классе , если * или *.

 e) Пусть  – положительно определенный оператор, т.е. . Доказать: для того чтобы функция из  была решением уравнения , необходимо и достаточно, чтобы она достигала в  минимум функционалу

;

решение  единственно в .

1. К. Миранда, Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, 1957., В.П. Михайлов, Дифференциальные уравнения в частных производных, М.: Наука, 1983., О.А. Ладыженская, Краевые задачи математической физики, М.: Наука, 1983. [↑](#footnote-ref-1)
2. См., например, Д.И. Блохинцев, Основы квантовой механики, М.: Наука, 1983., А. Мессиа, Квантовая механика. Т. I, М.: Наука, 1978. [↑](#footnote-ref-2)