**ЗАДАЧА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ**

При  задача на собственные значения

, 

называется задачей Штурма – Лиувилля,

, (1)

. (2)

В соответствии с условиями



считаем

,

.

Напомним, что область определения  оператора  состоит из функций  класса , удовлетворяющих граничным условиям (2).

Выражение для квадратичной формы , принимает следующий вид:



(последние слагаемые выпадают при  или  соответственно).

**1. Функция Грина.** Предположим, что  не есть собственное значение оператора ; это значит, в силу леммы , что либо , либо , либо .

Рассмотрим краевую задачу

, (3)

где . Так как  не есть собственное значение оператора , то решение краевой задачи (3) в классе  единственно. Построим решение этой задачи.

Пусть  и  – ненулевые (вещественные) решения однородного уравнения , удовлетворяющие условиям

. (4)

Из теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений следует, что такие решения всегда существуют и принадлежат классу . Решения  и  линейно независимы. Действительно, в противном случае  и, следовательно, в силу (4) решение  удовлетворяет и второму граничному условию (2). Это значит, что  является собственной функцией оператора , соответствующей собственному значению , вопреки предположению. Поэтому определитель Вронского

.

Кроме того, имеет место тождество Остроградского – Лиувилля[[1]](#footnote-1)

. (5)

Будем искать решение задачи (3) методом вариации произвольных постоянных,

. (6)

В соответствии с этим методом функции  и  должны удовлетворять системе линейных дифференциальных уравнений

 (7)

с определителем . Решая эту систему и пользуясь тождеством (5), получим

 (8)

Чтобы удовлетворить граничным условиям (2), положим , поскольку, в силу (4) и (7),





,

и аналогично для конца . Интегрируя (8) при условиях , имеем

,

.

Поставляя полученные выражения в (6), находим искомое решение задачи (3) в виде



или

, (9)

где

 (10)

Функция  называется функцией Грина краевой задачи (3) или оператора .

Итак, доказан следующий результат:

***Лемма.*** *Если  не есть собственное значение оператора , то решение краевой задачи (3) существует, единственно и выражается формулой (9).*

Перечислим свойства функции Грина , вытекающие непосредственно из формулы (10).

 1) Вещественна и непрерывна в замкнутом квадрате  и принадлежит классу  в замкнутых треугольниках

 и .

2) Симметрична :

.

3) На диагонали  скачок производной  равен , т.е.

.

4) Вне диагонали  удовлетворяет однородному уравнению

.

5) На боковых сторонах квадрата  удовлетворяет граничным условиям (2):

.

*Пример.* Функция Грина краевой задачи



имеет вид



*Физический смысл функции Грина*. Из свойств 1), 3) и 4) вытекает, что при каждом  функция Грина удовлетворяет в обобщённом смысле уравнению

.

Поэтому  есть возмущение, порождаемое точечным источником интенсивности 1, находящимся в точке . Таким образом, функция Грина  является естественным обобщением фундаментального решения на уравнения с переменными коэффициентами при наличии граничных условий (описывающие процессы в неоднородных ограниченных средах).

**2. Сведение задачи Штурма – Лиувилля к интегральному уравнению.** Покажем, что задача Штурма – Лиувилля сводится к интегральному уравнению Фредгольма с вещественным, симметричным и непрерывным ядром .

**Теорема.** *Краевая задача*

** (11)

*при условии, что  не есть собственное значение оператора , эквивалентна интегральному уравнению*

** (12)

*где  – функция Грина оператора .*

**Доказательство.** Если  – решение краевой задачи (11), что, применяя лемму с заменой  на , получим

,

т.е. функция  удовлетворяет интегральному уравнению (12).

Обратно, пусть функция  удовлетворяет интегральному уравнению (12). Рассмотрим краевую задачу

.

По лемме единственное решение этой задачи дается формулой

,

откуда следует, что  и удовлетворяет уравнению

,

т.е.  есть решение краевой задачи (11). Теорема доказана.

При  краевая задача (11) превращается в задачу Штурма – Лиувилля и, следовательно, задача Штурма – Лиувилля (1) – (2) эквивалентна задаче на собственные значения для однородного интегрального уравнения

 (13)

при условии, что  не есть собственное значение оператора *.*

Теперь освободимся от предположения, что  не есть собственное значение оператора *.* Для этого заметим, что, в силу леммы,  не есть собственное значение задачи Штурма –Лиувилля

, (14)

. (15)

Но , и поэтому задача (14) – (15) эквивалентна задаче (1) – (2) при .

*Следовательно, задача Штурма – Лиувилля (1) – (2) эквивалентна интегральному уравнению*

** (16)

*где  – функция Грина оператора .*

**3. Свойства собственных значений и собственных функций.** Таким образом, установлена эквивалентность задачи Штурма – Лиувилля (1) – (2) задаче на собственные значения для однородного интегрального уравнения (16) с симметричным (и, стало быть, эрмитовым) непрерывным ядром . При этом собственные значения  задачи (1) – (2) связаны с характеристическими числами  ядра  соотношением , а соответствующие им собственные функции совпадают. Поэтому для задачи Штурма – Лиувилля справедливы все положения теории интегральных уравнений с симметричным непрерывным ядром. В частности, *множество собственных значений  этой задачи не пусто и не имеет конечных предельных точек; собственные значения вещественны и конечной кратности; собственные функции  можно выбрать вещественными и ортонормальными; .*

Но задача Штурма – Лиувилля имеет ряд специфических свойств. Отметим некоторые из них.

*Собственные значения неотрицательны.*

Это утверждение доказана.

*Множество собственных значений счетно.*

Действительно, если бы это множество было конечным , то ядро  имело бы представление

. (17)

Но , и поэтому представление (17) противоречит свойству 3) функции Грина . Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

*Каждое собственное значение – простое.*

В самом деле, пусть  и  – собственные функции, соответствующие собственному значению . Это значит, что эти функции удовлетворяют уравнению (1) при  и граничным условиям (2). Из первого граничного условия (2)



вытекает в силу предположения , что

,

т.е. определитель Вронского для решений  и  уравнения (1) при  в точке  обращается в нуль. Поэтому эти решения линейно зависимы. Это и значит, что  – простое собственное значение задачи Штурма – Лиувилля (1) – (2).

**Теорема (В. А. Стеклов).** *Всякая функция  из  разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям  задачи Штурма – Лиувилля,*

**.(18)

**Доказательство.** Так как , то

.

Но , и потому . Таким образом, функция  является решением краевой задачи

,

причем, по построению,  не есть собственное значение оператора . Обозначим через  функцию Грина оператора . По лемме функция  выражается интегралом

,

т.е. истокообразно представляется через эрмитово непрерывное ядро . По теореме Гильберта – Шмидта функция  разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям ядра . Но собственные функции ядра  совпадают с собственными функциями оператора , которые в свою очередь совпадают с собственными функциями  оператора . Теорема доказана.

Таким образом, для задачи Штурма – Лиувилля верна теорема 1 предыдущего параграфа и следствия из нее. В частности, *система собственных функций задачи Штурма – Лиувилля полна в .*

**Замечание.** Другими методами В. А. Стеклов доказал более сильное утверждение: всякая функция , удовлетворяющая условиям , разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля (1) – (2)[[2]](#footnote-2).

**4. Нахождение собственных значений и собственных функций.** Изложим процесс вычисления собственных значений и собственных функции задачи Штурма – Лиувилля (1) – (2). Пусть  и  – решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям:

; .

Тогда функция

 (19)

удовлетворяет уравнению (1) и первому из граничных условий (2). Чтобы удовлетворить второму из граничных условий (2), необходимо положить

.

Корни  полученного трансцендентного уравнения и дадут все собственные значения задачи Штурма – Лиувилля (1) – (2). Соответствующие собственные функции  определяются по формуле (19) при ,



**Пример.** Вычислим собственные значения и собственные функции задачи Штурма – Лиувилля при :

. (20)

Для этого выпишем общее решение дифференциального уравнения (20)



и подберем произвольные постоянные  и  и параметр  так, чтобы удовлетворить граничным условиям (20) и условию нормировки . Условие  дает , а условие  дает  , так что



Из условия нормировки



имеем , и, следовательно,

 . (21)

Из построения следует, что других собственных функций задача (20) не имеет. Система собственных функций (21) полна в .

 Графики cобственных функций , изображены на рисунке.

**5. Метод факторизации.** Для численного решения краевой задачи (11) весьма удобен метод факторизации. Проиллюстрируем его на примере задачи (3):

, (22)

, (23)

при условиях, сформулированных в начале этого параграфа и , .

Представим дифференциальный оператор  второго порядка в виде произведения дифференциальных операторов первого порядка

 (24)

с вспомогательными функциями  и . Чтобы равенство (24) имело место для всех функций , необходимо и достаточно, чтобы  , а функция  удовлетворяла уравнению Рикатти

. (25)

В силу (24) уравнение (22) распадается на два уравнения первого порядка

, . (26)

Из уравнений (26) следует: чтобы удовлетворить первому из граничных условий (23) достаточно положить

, ; (27)

чтобы удовлетворить второму из граничных условий (23), полагаем

. (28)

Поскольку  и , то из уравнения (25) следует, что его решение  (положительно, если  и ). Поэтому, если , то первое из уравнений (26) устойчиво численно интегрируется при начальном условии  от точки  до точки ; второе из уравнений (26) также устойчиво численно интегрируется при известном начальном условии (28) от точки  до точки . Таким образом, решение неустойчивой краевой задачи (22) – (23) () мы свели к решению трех устойчивых задач Коши: для одного нелинейного уравнения Рикатти (25) и для двух линейных уравнений (26) с начальными условиями (27) и (28).

1. Понтрягин Л.С., Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982. [↑](#footnote-ref-1)
2. см. В. А. Стеклов, Основные задачи математической физики. – 2-е изд. – М.: Наука, 1983. ч. 1, гл. V. [↑](#footnote-ref-2)