**СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ**

Сферические функции были введены в связи с изучением решений уравнения Лапласа и, в частности, с теорией потенциала. В § 1 мы рассматриваем полиномы Лежандра, которые используются затем для построения шаровых и сферических функций (§ 2). Сферические функции являются весьма мощным аппаратом для решения многих задач математической физики.

**§ 1. Полиномы Лежандра**

 **1. Производящая функция и полиномы Лежандра.** Полиномы Лежандра тесно связаны с фундаментальным решением уравнения Лапласа , где  – расстояние точки  от фиксированной точки . Пусть  и  – радиусы-векторы точек  и , а  – угол между ними. Очевидно, можно написать

 (1)

где  и  или  (в обоих случаях  меньше единицы).

 Функция

  (2)

называется *производящей функцией* полиномов Лежандра.

 Разложим функцию  в ряд по степеням :

. (3)

Коэффициенты  разложения (3) являются полиномами -й степени и называются полиномами Лежандра.

 В силу теоремы Коши из формулы (3) следует, что

, (4)

где  – любой замкнутый контур в плоскости комплексного переменного  содержащий точку . Полагая , найдем , , .

 Формула (4) примет вид

, (5)

где – любой замкнутый контур, окружающий точку .

 Учитывая, что



и пользуясь формулой для производной

,

получаем из (5) формулы для :

. (6)

 Из формулы (6) непосредственно видно, что: 1)  есть полином степени ; 2)  содержит только степени  той четности, что и номер , так что

. (7)

Полагая , находим:

,

т.е. , и, в силу (7),

. ()

Формула (6) называется дифференциальной формулой для полиномов Лежандра или формулой Родрига.

 Заметим, что из (1) и (3) следует разложение потенциала

 (8)

 **2. Рекуррентные формулы.** Дифференцируя  по и , получим два тождества:

, (9)

 . (10)

Запишем левую часть формулы (9) в виде степенного ряда относительно , подставив в неё ряд (3) для  и ряд . Коэффициент при  полученного ряда, в силу (9), равен нулю при всех :

. (11)

Это тождество есть рекуррентная формула, связывающая три последовательных полинома. Она позволяет найти последовательно все , если учесть, что (6) дает

.

Так, например, полагая в (11) , найдем . Выведем ещё две рекуррентные формулы:



или

, (12)

. (13)

 Исключив из (9) и (10) , получим тождество , из которого сразу следует (12), если в левую часть этого тождества подставить ряд (3) и приравнять нулю коэффициент при . Дифференцируя затем (11) по  и исключая , получим  или (13) после замены  на .

 **3. Уравнение Лежандра.** Найдем дифференциальное уравнение, решением которого является . Для этого исключим  и  из (12) и (13). Сначала подставим  из (12) в (13):

,

затем продифференцируем полученное тождество по  и ещё раз применим формулу (12) для :



.

В результате приходим к уравнению

. (14)

 Тем самым доказано, что полиномы Лежандра  являются собственными функциями, соответствующими собственным значениям , следующей задачи:

 *найти такие значения , для которых на отрезке  существуют нетривиальные решения уравнения Лежандра*

*, (15)*

*ограниченные при  и удовлетворяющие условию нормировки .*

 **4. Ортогональность полиномов Лежандра.** Уравнение Лежандра (15) является частным случаем (при ,) рассмотренного уравнения

. (16)

Поэтому к нему применима общая теория для уравнения (16). Из этой теории следует:

 1) полиномы Лежандра разных порядков ортогональны между собой:

 при ;

 2) второе линейно независимое решение уравнения Лежандра при  обращается в бесконечность при  как .

 Система ортогональных полиномов, как известно, является замкнутой[[1]](#footnote-1). Поэтому уравнение Лежандра не имеет нетривиальных ограниченных решений ни при каком . В самом деле, если бы существовало решение  для , то оно было бы ортогонально во всем . Отсюда, в силу замкнутости системы ортогональных полиномов , следует, что . Тем самым доказано, что мы нашли все ограниченные нетривиальные решения уравнения Лежандра.

 **5. Норма полиномов Лежандра.** Вычислим норму  полиномов :

.

Применим рекуррентную формулу (11) дважды: сначала выразим из нее (предварительно заменив в (11)  на )  через  и , а затем  – через  и . Учитывая ортогональность полиномов  , , , получим:



.

Последовательное применение этой формулы дает

.

Подставив сюда , находим квадрат нормы

 и . (17)

Таким образом,

 (18)

**6. Нули полиномов Лежандра.** С помощью формулы Родриго

 (6)

можно доказать теорему:

 *Полином Лежандра  имеет  нулей, расположенных на интервале , а его производная  - го порядка , имеет  нулей внутри интервала  и не обращается в нуль на его концах.*

 Действительно, функция  обращается в нуль на концах интервала . Ее производная  обращается в нуль при  и  и по теореме о нуле производной имеет хотя бы один нуль внутри интервала . Вторая производная  имеет, по крайней мере, два нуля внутри интервала и не обращается в нуль на его концах. Продолжая рассуждения, приходим к заключению, что -я производная  имеет, по крайней мере,  нулей на интервале  или, точнее, ровно  нулей, так как она есть полином -й степени. Первая часть утверждения доказана. Производная  по той же теореме должна иметь, по крайней мере,  нуль внутри , но она есть полином ()-й степени и потому имеет ровно  нуль внутри интервала . Далее заключаем, что  имеет  нулей внутри интервала . 

 **7. Ограниченность полиномов Лежандра.** Покажем, что полиномы Лежандра  равномерно ограничены для всех значений аргумента :

.

Для этого нам понадобится интегральное представление

. (19)

Выведем формулу (19). Возьмем в (5) в качестве контура  окружность радиуса  с центром в точке . Тогда

, ,

,

 



.

Подставляя эти выражения в (5), получим (19). Если , то  и из (19) сразу следует ограниченность.

**§ 2. Присоединённые функции Лежандра**

 **1. Присоединённые функции.** Рассмотрим следующую задачу:

 *найти собственные значения и собственные функции уравнения*

*,* (1)

*при условии ограниченности*

*.* (2)

 Уравнение (1) является частным случаем уравнения

,

при . Так как коэффициент  обращается в нуль на обоих концах отрезка , то естественное условие ограниченности ставится при  и . В силу леммы 2 рассмотренные для уравнения общего вида , решение  задачи (1) должно при  иметь нули порядка , где . Отсюда следует, что решение задачи (1) естественно искать в виде

. (3)

Подставляя (3) в уравнение (1), найдём:

. (4)

Это же уравнение получается для производной  решения уравнения Лежандра (15) предыдущего параграфа, если его продифференцировать  раз. Нетривиальное ограниченное решение  уравнения Лежандра существует лишь при , где  – целое положительное число. Отсюда следует, что

 (5)

есть решение уравнения (4), а функция

 (6)

есть собственная функция задачи (1) – (2), соответствующая собственному значению

 . (7)

 называется присоединённой функцией Лежандра го порядка. Очивидно, что ,  лишь при .

 **2. Норма присоединённых функций.** Согласно общей теореме присоединённые функции  образуют ортогональную систему. Вычислим норму  присоединённых функций. Попутно будет доказана их ортогональность. Умножим уравнение (4) на  и учтем (5). После замены  на  получим:

. (8)

Введем обозначение

.

Интегрирование по частям даёт:

.

Постановка обращается в нуль, а подынтегральной член, в силу (8) и (7), преобразуется к виду

.

Из этой рекуррентной формулы следует

.

Выражение для  даётся формулой



так как . В результате

 (9)

т.е. присоединённые функции ортогональны между собой и квадрат нормы присоединённой функции  равен

 . (10)

 **3. Замкнутость системы присоединённых функций.** Докажем, что система присоединённой функций  полностью исчерпывает все ограниченные решения уравнения (1).

 В самом деле, при  решение, линейно независимое с , обращается в бесконечность при . Ограниченное же решение при  должно быть ортогонально ко всем .

 Для того чтобы убедиться, что не существует ограниченных решений уравнения (1), отличных от , достаточно установить, что система присоединённых функций  замкнута, т.е. что не существует никакой непрерывной функции, не равной тождественно нулю, которая была бы ортогональна ко всем функциям системы.

 ***Лемма.*** *Любая функция , непрерывная на отрезке  и обращающаяся в нуль на его концах при  и , может быть равномерно аппроксимирована с любой степенью точности линейной комбинации из присоединённых функций любого порядка .*

 Заметим, прежде всего, что производные полиномов Лежандра  являются полиномами степени . Поскольку любой полином по степеням  может быть представлен в виде линейной комбинации этих полиномов, то, в силу теоремы Вейерштрасса, любая функция , непрерывная на отрезке , может быть равномерно аппроксимирована с любой степенью точности при помощи линейной комбинации :

, если .

 Умножая это неравенство на , получаем, что

, если ,

где

, (11)

т.е. любая функция , представленная в виде (11), где  – функция, непрерывная на отрезке , может быть равномерно аппроксимирована с любой степенью точности линейной комбинацией присоединённых функций.

 Будем говорить, что функция  принадлежит классу , если она непрерывна на отрезке  и тождественно равна нулю в малых окрестностях точек  и :

 при .

Так как для каждой функции  класса  функция



является непрерывной на , то тем самым лемма доказана для функций класса .

 Рассмотрим некоторую функцию , непрерывную на отрезке , обращающуюся в нуль на концах. Очевидно, что эту функцию можно равномерно аппроксимировать при помощи функции  из класса  с точностью до :

 .

 Аппроксимируя  линейной комбинацией из присоединённых функций с точности до ,

,

получаем неравенство

,

которое и доказывает лемму.

 С помощью этой леммы легко доказывается полнота системы присоединённых функций, а тем самым и ее замкнутость. Напомним, что система функций называется полной на некотором отрезке , если любую функцию функцию , непрерывную на , можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности при помощи линейной комбинации этих функций

, если .

Очевидно, что всякую функцию, непрерывную на отрезке , можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности при помощи функции , непрерывной на  и обращающейся в нуль при :

.

 Беря линейную комбинацию присоединённых функций, равномерно аппроксимирующих функцию 

,

и пользуясь неравенством

,

получим:

,

если , что доказывает полноту, а тем самым и замкнутость системы присоединённых функций.

**§ 3. Гармонические полиномы и сферические функции**

 **1. Гармонические полиномы.** Гармоническим полиномом называется однородный полином, удовлетворяющий уравнению Лапласа

. (1)

 Нетрудно убедиться, что первые два однородных гармонических полинома имеют вид



,

где  – произвольные коэффициенты.

 Определим число линейно–независимых однородных гармонических полиномов степени 

 . (2)

Целая однородная функция степени  имеет  коэффициентов. Действительно, правую часть равенства (2) можно представить в виде

 



.

При  имеется один коэффициент, при  – два, . . . , при  имеем  коэффициентов, а при  число коэффициентов равняется , так что общее число коэффициентов равно

 . (3)

 Уравнение (1) налагает на коэффициенты  линейных однородных соотношений, так как  – однородная функция степени . Таким образом, полином должен иметь не менее чем  независимых коэффициентов. Если бы указанные  соотношения оказались линейно–зависимыми, то число независимых коэффициентов было бы больше  .

 Покажем, что только  коэффициентов линейно независимыми. Коэффициенты  однородного полинома можно представить в виде

.

Если  – гармонический полином, то  при  можно выразить через коэффициенты  и , число которых в точности равно .

 Действительно,



 .

Поступая аналогично с коэффициентами  и , мы в конце концов выразим  через коэффициенты типа и . Число коэффициентов вида  равно , а  равно . Таким образом, общее число линейно–независимых коэффициентов, а следовательно, и независимых гармонических полиномов –й степени в точности равно .

 Однородные гармонические полиномы называются *шаровыми функциями*.

 **2. Сферические функции.** Сферические функции проще всего могут быть введены при решении уравнения Лапласа для шаровой области методом разделения переменных.

 Будем искать решение уравнения Лапласа в переменных 

, (1)

полагая

.

Для определения  получаем уравнение Эйлера

 , (4)

а для определения  – уравнение

 (5)

с дополнительным условием ограниченности функции  на всей сфере.

 В частности, функция  удовлетворяет условиям

  (51)

Ограниченные решения уравнения (5), обладающие непрерывными до 2–го порядка производными, называются *сферическими функциями*.

 Решение задачи для  ищем также методом разделения переменных, полагая

.

Функция  удовлетворяет уравнению



и условию периодичности

.

 Задача для  имеет решение лишь при целом ,  и линейно независимыми решениями являются функции  и . Функция  определяется из уравнения



и условий ограниченности при  и .

 Вводя переменную



и , получим для  уравнение присоединённых функций

 . (6)

Уравнение (6), как мы видели, допускает ограниченные решения лишь при 

,

где .

 Выпишем полученную систему сферических функций – го порядка. Условимся приписать отрицательный верхний индекс тем функциям, которые содержать , и положительный – тем функциям, которые содержат . Тогда будем иметь:

 (7)

Число различных сферических функций – го порядка  равно . Линейная комбинация этих  сферических функций (7)

 (7\*)

или

,

где



является также сферической функцией и называется сферической гармоникой.

 Функции  не зависят от  и называется зональными. Так как  в силу леммы предыдущих параграфов имеет ровно  нулей внутри промежутка , то сфера разделяется на  широтных зон, внутри которых зональная функция сохраняет знак.

 Рассмотрим поведение функции



на сфере. Так как  обращается в нуль на полюсах,  или  обращаются в нуль на  меридианах, а  в силу той же леммы – на  широтах, то вся сфера разбивается на клетки, в которых  сохраняет постоянный знак. Функции  (при ) называются *тессеральными*.

 Вернемся теперь к отысканию функции . Будем искать функцию  в виде

.

Подставляя искомую форму решения в уравнение (4), получим характеристическое уравнение для определения :

,

откуда находим два значения :

 и .

Следовательно, частными решениями уравнения Лапласа являются функции

, (71)

, (72)

первая из которых, очевидно, соответствует решению внутренних задач, а вторая – внешних задач.

 Покажем, что найденные решения уравнения Лапласа являются однородными полиномами –й степени. Общий член, например, в формуле (71) можно записать так:

,

где  изменяется от 0 до  . Функцию  можно представить в виде произведения трёх полиномов:

,

где





.

Отсюда ясно, что функция  есть однородный гармонический полином степени .

 Очевидно, что сферические функции являются значениями шаровых функций (71) и (72) на сфере радиуса единица.

 **3. Ортогональность системы сферических функций.** Докажем, что сферические функции, соответствующие различным значения , ортогональны на поверхности сферы . Пусть  и  удовлетворяют уравнениям

; , (5)

где

.

Нетрудно видеть, что имеет место формула

, (8)

,

легко получаемая интегрированием по частям.

 На поверхности сферы

, ,

так что



и формулу (8) можно записать в виде

.

Меняя местами в формуле (8) функции  и  и вычитая полученную формулу из формулы (8), будем иметь:

 . (9)

Формулы (8) и (9) являются формулами Грина для оператора сферических функций.

 Из формулы (9) легко следует ортогональность функций  и . В самом деле, пользуясь уравнениями (5), получим из формулы (9)

,

откуда при 



или

.

Тем самым доказана ортогональность сферических функций, соответствующих разным  .

 Выше мы получили для  систему  сферических функций -го порядка. Докажем, что и эти *сферические функции ортогональны между собой на сфере*.

 Пусть  и  – две сферические функции. Интегрируя их произведение и пользуясь формулой (9), получим:







 (81)

т.е. сферические функции, определяемые формулой (7), образуют ортогональную систему в области ,  и имеют квадрат нормы, равный

 , (82)

где ,  при .

 Предполагая возможность разложения произвольной функции  в ряд по сферическим функциям (возможность такого разложения для дважды непрерывно дифференцируемой функции будет подробно обоснована ниже), допускающий почленное интегрирование, получим

,

где  и  – коэффициенты Фурье, определяемые формулами

 (1.3.9)

, 

 Общее решение уравнения Лапласа можно представить в виде



для внутренней краевой задачи или



для внешней краевой задачи, где



 **4. Полнота системы сферических функций.** Докажем полноту системы сферических функций, определяемых формулой (7). Докажем сперва, что любая функция , имеющая непрерывные вторые производные, может быть равномерно аппроксимирована некоторым полиномом из сферических функций.

 Рассмотрим разложение такой функции в ряд Фурье

.

Используя ограниченность второй производной, легко оценить коэффициенты  и  этого разложения

; ,

где

.

Отсюда следует, что для остаточного члена ряда Фурье имеет место равномерная оценка

,

 (10)

где  – любое неперед заданное число.

 На основании пункта 3 параграфа 2 коэффициенты Фурье  и , являющиеся непрерывными функциями , обращающимся в нуль при , равном  и , могут быть равномерно аппроксимированы линейными комбинациями присоединённых функций -го порядка

,

. (11)

Тогда из неравенств (10) и (11) будет следовать:

,

 (12)

что и доказывает возможность равномерной аппроксимации любой дважды дифференцируемой функции  полиномом из сферических функций. Отсюда следует, что и любую непрерывную функцию можно равномерно аппроксимировать полиномом сферических функций, что и доказывает полноту системы функций, определяемых формулой (7). Из полноты этой системы следует ее замкнутость.

 Таким образом, доказано, что уравнение сферических функций не имеет ограниченных решений при  и что всякая сферическая функция -го порядка ( при  ) представима формулой (7\*).

 **5. Разложение по сферическим функциям.** Сферические функции являются собственными функциями уравнения

 или  (13)

на поверхности сферы  при дополнительных условиях ограниченности.

 Для обоснования разложимости произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции  в ряд по сферическим функциям перейдем к соответствующему интегральному уравнению. С этой целью построим функцию источника уравнения

 , (14)

удовлетворяющую условию ограниченности решения при  и .

 Как было отмечено выше

 (15)

на поверхности сферы. Уравнение (14) можно рассматривать как уравнение стационарного распределения температуры или стационарного электрического тока на поверхности сферы.

 С этой точки зрения понятно, что невозможно построить решение однородного уравнения

 (16)

с особенностью в одной только точке, так как для возможности существования стационарной температуры необходимо, чтобы сумма источников и стоков равнялась нулю.

 Введем обобщенную функцию источника, которая в нашем случае должна быть решением уравнения

 , (17)

регулярным всюду, кроме полюса , где она должна иметь логарифмическую особенность. Правая часть уравнения (17) означает плотность отрицательных источников (стоков) тепла, равномерно распределенных по поверхности сферы так, что

 . (18)

Предполагая, что искомая функция источника  является функцией только одного переменного , получаем для нее обыкновенное дифференциальное уравнение, решая которое найдем:

. (19)

Требуя, чтобы  имело особенность только при , получаем:



и

.

Так как  является решением однородного уравнения, то функция источника  определена с точностью до произвольной постоянной. Поэтому мы можем написать:

. (20)

Если источник находится в некоторой точке , то функция источника имеет вид

, (21)

где  – угловое расстояние между точками  и  [[2]](#footnote-2).

 Перейдем теперь к решению неоднородного уравнения

. (22)

Это уравнение может иметь регулярное всюду на  решение только при выполнении условия

, (23)

выражающего, что сумма источников и стоков должна быть равна нулю. Его легко получить из формул Грина для оператора , установленных в пункте 3.

 Покажем, что всякое решение уравнения (22), удовлетворяющие условию (23), представимо в виде

,

где  – некоторая постоянная, а  – функция источника, определяемая формулой (21). Пусть  – некоторая фиксированная точка сферы, в которую мы помещаем северный полюс (  ), а  – диаметрально противоположная ей точка. Точки  и  являются особыми точками уравнения (22). Поэтому построим на  в этих точках малые кружки  и  и рассмотрим интеграл

.

Подставляя в правую часть выражения для  и , имеем:



.

Учитывая, что в квадратных скобках стоят точные производные от выражений

 и , причем ,

получаем после интегрирования

.

Далее, замечая, что

,

будем иметь:



.

Отсюда видно, что

 и .

Следовательно,

, (24)

где

 – постоянная.

Решение нашей задачи определено с точностью до аддитивной постоянной. То решение, для которого , определяется формулой

.

Применяя (24) к уравнению сферических функций , заключаем:

*сферические функции, определяемые формулой (7), представляют совокупность всех линейно-независимых собственных функций интегрального уравнения*

**

*с симметрическим ядром , определяемым формулой (21).*

 К этому уравнению применима общая теория интегральных уравнений с симметрическим ядром. Отсюда следует, что произвольная дважды дифференцируемая функция  может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по сферическим функциям

, (25)

где

, (26)

 и  – коэффициенты Фурье.

1. Система ортогональных функций  называется замкнутой, если не существует непрерывной функции, не равной тождественно нулю и ортогональной ко всем функциям данной системы.

 Система ортогональных функций  называется полной в промежутке , если любую непрерывную функцию можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности при помощи линейной комбинации функций . Иными словами, какого бы ни было , всегда можно указать такую линейную комбинацию функций

,

что

.

Для полной системы функций  имеет место соотношение

,

где  – коэффициенты Фурье функции 

, .

*Замкнутость есть следствие полноты.* Пусть дана некоторая полная система ортогональных функций . Допустим, что существует непрерывная функция , ортогональная ко всем . Тогда в силу полноты системы функций  должно иметь место равенство

,

так как  по предположению. Отсюда следует, что , что противоречит сделанному допущению, т.е. система  является замкнутой.

 Полнота и, тем самым, замкнутость системы ортогональных полиномов  является следствием теоремы Вейерштрасса о возможности равномерной аппроксимации непрерывной функции при помощи полиномов:

 какова бы ни была непрерывная функция , заданная в промежутке , и каково бы ни было , существует такой полином , что

 . (A)

 В самом деле, представляя полином  в виде линейной комбинации ортогональных полиномов  и пользуясь неравенством (A), мы получим условие полноты системы ортогональных полиномов. [↑](#footnote-ref-1)
2. Угол  определяется из формулы . [↑](#footnote-ref-2)