

Матрица перехода линейного оператора

Пример решения задачи по алгебре

Задача. Линейный оператор $A: R^3 \rightarrow R^3$ в базисе e_1, e_2, e_3 представлен данной матрицей. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе f_1, f_2, f_3 .

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} f_1 = e_1 - e_2 + 3e_3, \\ f_2 = 4e_1 + e_2 - e_3, \\ f_3 = 2e_1 - 3e_2. \end{cases}$$

Решение

При переходе от «старого» базиса e_1, e_2, e_3 к «новому» базису f_1, f_2, f_3 изменяются координаты векторов пространства и, следовательно, изменяется матрица линейного оператора. При этом, матрица A оператора в «старом» базисе и матрица A' того же оператора в «новом» базисе связаны соотношением $A' = F^{-1} \cdot A \cdot F$, где F - матрица перехода от «старого» базиса к «новому», то есть квадратная матрица, столбцы которой состоят из координат новых базисных векторов в «старом» базисе.

Составим матрицу перехода $F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ и вычислим $A' = F^{-1} \cdot A \cdot F$.

Для этого найдем матрицу F^{-1} : $F^{-1} = \frac{1}{\det F} \begin{vmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix},$

$$\det F = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -43,$$

$$F_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad F_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad F_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -14,$$

$$F_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9, \quad F_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6, \quad F_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$F_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad F_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 13, \quad F_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$F^{-1} = -\frac{1}{43} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -14 \\ -9 & -6 & 1 \\ -2 & 13 & 5 \end{pmatrix}$$

и вычислим $A' = F^{-1} \cdot A \cdot F$:

$$A' = F^{-1} A F = -\frac{1}{43} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -14 \\ -9 & -6 & 1 \\ -2 & 13 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{43} \begin{pmatrix} 18 & -37 & -3 \\ 11 & -25 & 34 \\ 12 & 47 & -45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{43} \begin{pmatrix} 46 & 38 & 147 \\ 138 & -15 & 97 \\ -170 & 140 & -117 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{46}{43} & -\frac{38}{43} & -\frac{147}{43} \\ -\frac{138}{43} & \frac{15}{43} & -\frac{97}{43} \\ \frac{170}{43} & -\frac{140}{43} & \frac{117}{43} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ответ. Матрица перехода $A' = \begin{pmatrix} -\frac{46}{43} & -\frac{38}{43} & -\frac{147}{43} \\ -\frac{138}{43} & \frac{15}{43} & -\frac{97}{43} \\ \frac{170}{43} & -\frac{140}{43} & \frac{117}{43} \end{pmatrix}$

Матрица линейного оператора

Задание. Найти в ортонормированном базисе i, j, k матрицу линейного оператора $f: E^3 \rightarrow E^3$, переводящего любой вектор x в вектор $y = f(x)$.

$$f(x) = (a, x)a, \text{ если } a = i - j + 2k$$

РЕШЕНИЕ:

Пусть вектор $x = x_1i + x_2j + x_3k$.

Тогда

$$\begin{aligned} y = f(x) &= (a, x)a = (x_1 - x_2 + 2x_3)(i - j + 2k) = \\ &= i(x_1 - x_2 + 2x_3) + j(-x_1 + x_2 - 2x_3) + k(2x_1 - 2x_2 + 4x_3) \end{aligned}$$

Получаем, что вектор $x = x_1i + x_2j + x_3k$ переводится в вектор $y = i(x_1 - x_2 + 2x_3) + j(-x_1 + x_2 - 2x_3) + k(2x_1 - 2x_2 + 4x_3)$.

Матрица такого линейного преобразования $y = Ax$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Линейность отображений.

Матрица оператора

Задача. Установить, являются ли заданные отображения $A: R^4 \rightarrow R^4$ линейными. В случае линейности отображения записать матрицу оператора A в каноническом базисе

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1).$$

$$a) Ax = (x_1 - 2x_4; x_2 + x_3; -x_1; x_1 + 3x_2);$$

$$б) Ax = (x_1 - 2x_4; x_2 \cdot x_3; -x_1; x_1 + 3x_2).$$

Решение

По условию, пространство R^4 отображается в пространство R^4 , следовательно, для любых элементов (векторов) этого пространства $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ и произвольного числа λ , введены операции сложения и умножения на число:

$$(x + y = x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) \in R^4, \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4) \in R^4.$$

а) Если $Ax = (x_1 - 2x_4; x_2 + x_3; -x_1; x_1 + 3x_2)$, то:

$$Ax = (x_1; x_2; x_3; x_4) = (x_1 - 2x_4; x_2 + x_3; -x_1; x_1 + 3x_2),$$

$$Ay = (y_1; y_2; y_3; y_4) = (y_1 - 2y_4; y_2 + y_3; -y_1; y_1 + 3y_2).$$

Проверим выполнение условий линейности отображения:

1)

$$A(x + y) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3; x_4 + y_4) =$$

$$((x_1 + y_1) - 2(x_4 + y_4); (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3); -(x_1 + y_1); (x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2)) =$$

$$= ((x_1 + y_1 - 2x_4 - 2y_4); (x_2 + y_2 + x_3 + y_3); (-x_1 - y_1); (x_1 + y_1 + 3x_2 + 3y_2)) =$$

$$= ((x_1 - 2x_4 + y_1 - 2y_4); (x_2 + x_3 + y_2 + y_3); (-x_1 - y_1); (x_1 + 3x_2 + y_1 + 3y_2)) =$$

$$= ((x_1 - 2x_4) + (y_1 - 2y_4); (x_2 + x_3) + (y_2 + y_3); (-x_1) + (-y_1); (x_1 + 3x_2) + (y_1 + 3y_2)) = Ax + Ay$$

$A(x + y) = Ax + Ay$ равны, следовательно, первое условие линейности отображения выполняется.

2)

$$A(\lambda x) = (\lambda x_1; \lambda x_2; \lambda x_3; \lambda x_4) = (\lambda x_1 - 2\lambda x_4; \lambda x_2 + \lambda x_3; -\lambda x_1; \lambda x_1 + 3\lambda x_2) =$$

$$= (\lambda(x_1 - 2x_4); \lambda(x_2 + x_3); -\lambda x_1; \lambda(x_1 + 3x_2)) =$$

$\lambda(x_1 - 2x_4; x_2 + x_3; -x_1; x_1 + 3x_2) = \lambda Ax$, следовательно, второе условие линейности отображения тоже выполняется.

Таким образом, отображение $Ax = (x_1 - 2x_4; x_2 + x_3; -x_1; x_1 + 3x_2)$ является линейным оператором.

Найдем матрицу этого оператора в каноническом базисе $e_1 = (1; 0; 0; 0)$, $e_2 = (0; 1; 0; 0)$,

$$e_3 = (0; 0; 1; 0), e_4 = (0; 0; 0; 1).$$

В силу линейности оператора для произвольного $x = (x_1; x_2; x_3; x_4)$:

$$\begin{aligned} Ax &= (x_1 e_1; x_2 e_2; x_3 e_3; x_4 e_4) = A(x_1 e_1) + A(x_2 e_2) + A(x_3 e_3) + A(x_4 e_4) = \\ &= x_1 A(e_1) + x_2 A(e_2) + x_3 A(e_3) + x_4 A(e_4) = \\ &= x_1 A(1; 0; 0; 0) + x_2 A(0; 1; 0; 0) + x_3 A(0; 0; 1; 0) + x_4 A(0; 0; 0; 1) \end{aligned}$$

Для заданного преобразования:

$$A(e_1) = (1; 0; -1; 1); \quad A(e_2) = (0; 1; 0; 3); \quad A(e_3) = (0; 1; 0; 0); \quad A(e_4) = (-2; 0; 0; 0)$$

Преобразованный вектор Ax имеет в стандартном базисе координаты

$$Ax = x_1(1; 0; -1; 1) + x_2(0; 1; 0; 3) + x_3(0; 1; 0; 0) + x_4(-2; 0; 0; 0) = (x_1 - 2x_4; x_2 + x_3; -x_1; x_1 + 3x_2)$$

Такому оператору соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, т.к.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_4 \\ x_2 + x_3 \\ -x_1 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix},$$

б) Проверим выполнение условий линейности отображения

$$Ax = (x_1 - 2x_4; x_2 + x_3; -x_1; x_1 + 3x_2).$$

$$\text{т.к. } Ax = A(x_1; x_2; x_3; x_4) = (x_1 - 2x_4; x_2 + x_3; -x_1; x_1 + 3x_2),$$

$$Ay = A(y_1; y_2; y_3; y_4) = (y_1 - 2y_4; y_2 + y_3; -y_1; y_1 + 3y_2), \text{ то}$$

$$\begin{aligned} A(x+y) &= (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3; x_4 + y_4) = \\ &= ((x_1 + y_1) - 2(x_4 + y_4); (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3); -(x_1 + y_1); (x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2)) = \\ &= ((x_1 + y_1 - 2x_4 - 2y_4); (x_2 + x_3 + y_2 + y_3); -(x_1 + y_1); (x_1 + y_1 + 3x_2 + 3y_2)) = \\ &= ((x_1 - 2x_4) + (y_1 - 2y_4); \underline{(x_2 + x_3 + y_2 + y_3)}; -(x_1) + (-y_1); (x_1 + 3x_2) + (y_1 + 3y_2)) \\ Ax + Ay &= (x_1 - 2x_4; x_2 + x_3; -x_1; x_1 + 3x_2) + (y_1 - 2y_4; y_2 + y_3; -y_1; y_1 + 3y_2) = \\ &= (x_1 - 2x_4 + y_1 - 2y_4; x_2 + x_3 + y_2 + y_3; -x_1 - y_1; x_1 + 3x_2 + y_1 + 3y_2) = \\ &= ((x_1 + y_1) - 2(x_4 + y_4); \underline{(x_2 + x_3 + y_2 + y_3)}; -(x_1 + y_1); (x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2)) \end{aligned}$$

Третьи координаты векторов $A(x+y)$ и $Ax + Ay$ не равны:
 $x_2 x_3 + y_2 x_3 + x_2 y_3 + y_2 y_3 \neq x_2 x_3 + y_2 y_3$; следовательно, $A(x+y) \neq Ax + Ay$, то есть рассмотренное отображение не является линейным.

Ответ.

а) отображение является линейным; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

б) отображение не является линейным.