Задачи к лекции 6

1) Доказать, что существует единственный линейный оператор, переводящий векторы $\vec{a}_1 = (2, 0, 3)$, $\vec{a}_2 = (4, 1, 5)$, $\vec{a}_3 = (3, 1, 2)$ соответственно в $\vec{b}_1 = (1, 2, -1)$, $\vec{b}_2 = (4, 5, -2)$, $\vec{b}_3 = (1, -1, 1)$.

2) В пространстве многочленов степени не выше 2 задан оператор $A(y) = y'' + xy'$. Доказать его линейность.

3) В пространстве квадратных матриц второго порядка задан оператор $A(X) = X \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Доказать его линейность.

4) Доказать, что образ и ядро линейного оператора являются линейными подпространствами.

5) Найти образ и ядро линейного оператора в трехмерном евклидовом пространстве, заданного формулой: $A\vec{x} = [\vec{a}, [\vec{x}, \vec{b}]]$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданные векторы в трехмерном пространстве ($[\vec{a}, \vec{b}]$ – векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$).

6) Доказать, что у оператора A из примера 3 существует обратный оператор A^{-1} . Найти A^{-1} .