Лекция 6. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Понятие линейного оператора и основные операции над ними

Определение 1. Пусть X и Y – линейные пространства (вещественные или комплексные). Оператором A, действующим из X в Y, называется правило (закон), ставящее каждому элементу $x \in X$ единственный элемент y пространства Y. Результат применения оператора A к элементу x обозначается символом $y = Ax$ или $y = A(x)$. Элемент x называется прообразом элемента $y = Ax$.

Оператор A, действующий из X в Y, называется линейным, если для любых элементов x_1 и x_2 пространства X и любых комплексных чисел α_1 и α_2 (вещественных в вещественном пространстве) выполняется соотношение:

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 . (1)$$

Некоторые операторы имеют специальные названия. Так, линейный оператор A, действующий из X в комплексную плоскость **C** (в действительную прямую **R**), называется линейной формой или линейным функционалом. Линейный оператор A, действующий из X в X, называют также линейным преобразованием пространства X.

Очевидно, что действие линейного оператора A на любой вектор пространства X определяется единственным образом, если известны образы $Al_1, Al_2, \dots, Al_n$ векторов $l_1, l_2, \dots, l_n$, составляющих базис пространства X.

Утверждение 1. Линейный оператор A, действующий из пространства X в пространство Y, нулевой элемент θ_x пространства X переводит в нулевой элемент θ_y пространства Y, т.е. $A\theta_x = \theta_y$.

Доказательство. В самом деле, $\theta_x = 0 \cdot x$, где x – произвольный элемент пространства X. Значит,

$$A\theta_x = A(0 \cdot x) = 0 \cdot Ax = \theta_y .$$

Отсюда следует

Утверждение 2. Если векторы x_1, $x_2, \dots$, x_n пространства X линейно зависимы, то их образы $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2, \dots$, $y_n = Ax_n$ также линейно зависимы, т.е. любой линейный оператор линейно зависимую систему векторов переводит снова в линейно зависимую систему.

Доказательство. Действительно, если x_1, x_2,…, x_n из X линейно зависимы, то существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, не все равные нулю, что $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = \theta_x$. Тогда согласно предыдущему утверждению

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) = \lambda_1 A x_1 + ... + \lambda_n A x_n = \theta_y .$$

Следовательно, векторы $Ax_1, Ax_2, ..., Ax_n$ линейно зависимы.

<u>Определение</u> <u>2.</u> Два линейных оператора A и B, действующие из X в Y, называются равными, если для любого $x \in X$

$$Ax = Bx. \qquad (2)$$

Суммой двух линейных операторов A и B, действующих из X в Y, называется оператор $A + B$, такой, что для любого $x \in X$:

$$(A + B)\, x = Ax + Bx. \qquad (3)$$

Произведением линейного оператора A на число λ называется оператор λA, такой, что для любого $x \in X$:

$$(\lambda A)\, x = \lambda\, (Ax). \qquad (4)$$

Нетрудно заметить, что если операторы A и B линейные, то операторы $A + B$ и λA также будут линейными.

Оператор, который каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие нулевой элемент пространства Y, называется нулевым оператором и обозначается символом **O**, т.е. для любого $x \in X$: $\mathbf{O}x = \theta_y$, где θ_y – нулевой элемент пространства Y. Очевидно, нулевой оператор всегда линеен и $\mathbf{O} = 0 \cdot A$, где A – произвольный оператор, действующий из X в Y.

Пусть A – линейный оператор, действующий из пространства X в пространство Y. Оператор $B = (-1)\, A$ называется оператором, противоположным оператору A. Оператор, противоположный оператору A, принято обозначать $-A$.

Обозначим $L\,(X, Y)$ множество всех линейных операторов, действующих из линейного пространства X в линейное пространство Y. $L\,(X, X)$ будем обозначать $L\,(X)$.

Справедливо следующее

<u>Утверждение 3.</u> Множество $L\,(X, Y)$ есть линейное пространство.

Доказательство. Как уже отмечалось выше, операции сложения и умножения на число, определенные во множестве $L\,(X, Y)$, не выводят из этого множества. Кроме того, в этом множестве определен нулевой оператор и для всякого оператора A существует противоположный оператор. Нетрудно убедиться также, что операции сложения операторов и умножения на число удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства.

Ниже будем иметь дело с операторами из пространства $L\ (X)$. Оператор I называется тождественным или единичным, если он каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие этот же элемент x, т.е. по определению

$$Ix = x$$

для всякого $x \in X$.

Пусть A и B – линейные операторы, определенные в пространстве X. Тогда по определению произведением операторов A и B является такой оператор AB, который действует по правилу

$$(AB)\ x = A\ (Bx) \text{ для любого } x \in X. \qquad (5)$$

Иными словами, преобразование AB есть результат последовательного выполнения преобразований B и A.

Если операторы A и B линейные, то оператор AB также линеен. Действительно, для любых x, $y \in X$ и любых чисел α и β имеем:

$$(AB)\ (\alpha x + \beta y) = A\ [B\ (\alpha x + \beta y)] = A\ [\alpha Bx + \beta By] =$$

$$= \alpha A\ (Bx) + \beta A\ (By) = \alpha\ (AB)\ x + \beta\ (AB)\ y.$$

Отметим, что в общем случае $AB \neq BA$ (см. пример 8).

Справедливы следующие свойства операторов из $L\ (X)$.

Свойство 1. $\lambda\,(AB) = (\lambda A)\ B$.

Свойство 2. $(A + B)\ C = AC + BC$.

Свойство 3. $A\ (B + C) = AB + AC$.

Свойство 4. $(AB)\ C = A\ (BC)$.

Доказательство. Свойство 1 следует из определения умножения операторов (см. формулы (4), (5)).

Свойство 2. Согласно формулам (3), (5) имеем для любого $x \in X$

$$((A+B)C)x = (A+B)(Cx) = A(Cx) + B(Cx) = (AC)x + (BC)x =$$

$$= (AC+BC)x, \quad \text{ò.å.}\ \ ((AC+B)C)x = (AC+BC)x.$$

Так как это равенство справедливо для любого $x \in X$, то согласно формуле (2) $(A + B)\ C = AC + BC$.

Свойство 3. Доказывается так же, как свойство 2.

Свойство 4. Согласно формуле (5) имеем для любого $x \in X$

$$((AB)\ C)\ x = (AB)\ (Cx) = A\ (B\ (Cx)) = A\ ((BC)\ x) = (A\ (BC))\ x,$$

$$\text{т.е. } ((AB)\ C)\ x = (A\ (BC))\ x.$$

Так как это равенство справедливо для любого $x \in X$, то согласно формуле (2) $(AB)\ C = A\ (BC)$.

Следствие 1. Свойство 4 дает возможность определить произведение любого числа операторов из $L\ (X)$.

Примеры линейных операторов.

Пример 1. Рассмотрим линейное пространство V_2 векторов на плоскости, выходящих из некоторой точки О. Оператор A зададим следующим условием: каждому вектору $\vec{x} \in V_2$ ставится в соответствие вектор $A\vec{x} \in V_2$, получающийся из $\vec{x}$ поворотом на угол φ вокруг точки O. Нетрудно проверить, что так определенный оператор линеен. Этот оператор называется оператором поворота плоскости на угол φ.

Пример 2. В пространстве V_3 свободных векторов оператор A зададим равенством:

$$A\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}] \text{ для любого } \vec{x} \in V_3,$$

где $\vec{a}$ – фиксированный вектор пространства V_3. Линейность этого оператора следует из свойств векторного произведения.

Пример 3. В пространстве M_n многочленов степени $\leq n-1$ оператор A зададим равенством:

$$AP(t) = \frac{d}{dt}(P(t))$$

для любого $P(t) \in M_n$.

Линейность этого оператора (оператора дифференцирования) следует из линейности операции дифференцирования.

Пример 4. Рассмотрим пространство $C\ [a, b]$, векторами которого являются непрерывные функции $f(t)$, определенные на отрезке $[a, b]$. Оператор A зададим равенством:

$$Af(t) = \int_a^b h(\tau) f(\tau) d\tau$$

для любой $f(t) \in C\ [a, b]$, где $h(t)$ – некоторая фиксированная функция из C $[a, b]$. Линейность так определенного оператора следует из линейного свойства интеграла Римана.

Пример 5. В произвольном линейном пространстве X оператор A зададим равенством: $Ax = \lambda x$ для любого $x \in X$ (при $\lambda = 1$ получим единичный оператор I, а при $\lambda = 0$ нулевой оператор **O**). Очевидно, это – линейный оператор, который называется оператором «растяжения» (в широком смысле). Он растягивает все векторы в одинаковое число раз.

Пример 6. Пусть линейное пространство X есть прямая сумма своих подпространств X' и X'', т.е. $X = X' \oplus X''$. Тогда любой элемент $x \in X$ можно единственным образом представить в виде: $x = x' + x''$, где $x' \in X'$, $x'' \in X''$. Оператор A определим равенством:

$$Ax = \lambda x' + \mu x''$$

для любого $x \in X$, где λ и μ – некоторые фиксированные числа. Линейность так определенного оператора очевидна. Этот оператор по аналогии с предыдущим примером можно назвать оператором «растяжения» с коэффициентом «растяжения» λ в подпространстве X' и с коэффициентом «растяжения» μ в подпространстве X''.

Пример 7. Положив в предыдущем примере $\lambda = 1$, а $\mu = 0$, получим оператор, который называется оператором проектирования пространства X на подпространство X' в направлении подпространства X''. Оператор проектирования, следовательно, определяется следующим образом: если $X = X' \oplus X''$, то для любого $x = x' + x''$, где $x' \in X'$, $x'' \in X''$, оператор A проектирования пространства X на подпространство X' в направлении X'' задается равенством: $Ax = x'$. Это, очевидно, линейный оператор.

Пример 8. Приведем пример операторов A и B, для которых $AB \neq BA$. В линейном пространстве V_2 свободных векторов на плоскости, выходящих из некоторой фиксированной точки O, рассмотрим ОНБ $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

В качестве оператора A рассмотрим оператор проектирования V_2 на подпространство $L(\vec{e}_1)$ в направлении подпространства $L(\vec{e}_2)$, где $L(\vec{e}_1)$ и $L(\vec{e}_2)$ – линейные оболочки векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ соответственно. В качестве оператора B возьмем оператор поворота плоскости V_2 на угол $\frac{\pi}{2}$ в направлении кратчайшего поворота от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$. Тогда, очевидно,

$$(AB)\vec{e}_1 = A(B\vec{e}_1) = A(\vec{e}_2) = \theta;$$

$$(BA)\vec{e}_1 = B(A\vec{e}_1) = B(\vec{e}_1) = \vec{e}_2.$$

Следовательно, $(AB)\vec{e}_1 \neq (BA)\vec{e}_1$. Таким образом, из формулы (2) следует $AB \neq BA$.

2. Образ и ядро линейного оператора

Множество всех векторов $y \in Y$, таких, что $y = Ax$, $x \in X$ называется областью значений или образом оператора A и обозначается $\operatorname{Im} A$. Множество всех векторов $x \in X$, для которых $Ax = \theta$, называется ядром оператора A и обозначается $Ker\, A$.

Очевидно, что образ $\operatorname{Im} A$ и ядро $Ker\, A$ линейного оператора A являются линейными под пространствами пространств Y и X соответственно.

Размерность подпространства $\operatorname{Im} A$ называется рангом оператора A (кратко $Rang\, A = \dim(\operatorname{Im} A)$), размерность подпространства $Ker\, A$ называется дефектом оператора A.

Для некоторых операторов предыдущего пункта опишем их образ и ядро.

<u>Пример 9.</u> Для оператора поворота на угол φ, очевидно $\mathrm{Im}\,A = V_2$, $Ker\,A = \theta$.

<u>Пример 10.</u> Для оператора $A : A\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}]$ $(\vec{a} \neq 0)$, действующего в V_3, из свойств векторного произведения получаем, что $Ker\,A = L(\vec{a})$, $\mathrm{Im}\,A = L^{\perp}(\vec{a})$, где $L(\vec{a})$ – линейная оболочка вектора $\vec{a}$, а $L^{\perp}(\vec{a})$ – ортогональное дополнение к $L(\vec{a})$, т.е. плоскость ортогональная вектору $\vec{a}$, если $\vec{a} = \vec{0}$, то $\mathrm{Im}\,A = \theta$, $Ker\,A = V_3$.

<u>Пример 11.</u> Для оператора дифференцирования в пространстве M_n, очевидно, $\mathrm{Im}\,A = M_{n-1}$, $Ker\,A = M_0$.

<u>Пример 12.</u> Для оператора проектирования пространства X $(X = X' \oplus X'')$, на подпространство X' в направлении пространства X'', очевидно, $\mathrm{Im}\,A = X'$, $Ker\,A = X''$.

Нетрудно заметить, что во всех приведенных примерах сумма размерностей образа и ядра равна размерности всего пространства. Оказывается, это не случайность, а имеет место общая

<u>Теорема 1</u>. Пусть A – произвольный линейный оператор, действующий в n-мерном пространстве V_n, т.е. $A \in L(V_n)$. Тогда сумма размерностей образа и ядра оператора A равна размерности всего пространства, т.е. $\dim(\mathrm{Im}\,A) + \dim(Ker\,A) = n$.

Доказательство. Пусть $\dim(Ker\,A) = K$. Выберем в подпространстве $Ker\,A$ базис $e_1, e_2, ..., e_k$ и дополним его до базиса $e_1, e_2, ..., e_k$, $e_{k+1}, ..., e_n$ во всем пространстве V_n. Рассмотрим элементы $Ae_{k+1}, Ae_{k+2}, ..., Ae_n$. Покажем, что они образуют базис подпространства $\mathrm{Im}\,A$. Действительно, пусть y – произвольный элемент из $\mathrm{Im}\,A$. Тогда, по определению, существует $x \in V_n$, такой, что $y = Ax$. Так как $e_1, e_2, ..., e_n$ – базис в V_n, то $x = \lambda_1 e_1 + \ +\lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$. Но так как $e_1, e_2, ..., e_k \in Ker\,A$, т.е. $Ae_1 = ... = \ ... = Ae_k = 0$, то

$$y = Ax = \lambda_{k+1} Ae_{k+1} + ... + \lambda_n Ae_n . \qquad (6)$$

Покажем, что элементы $Ae_{k+1}, ..., Ae_n$ линейно независимы. Действительно, пусть существуют числа $\alpha_1, ..., \alpha_{n-k}$ не равные одновременно нулю, и такие, что

$$\alpha_1 Ae_{k+1} + ... + \alpha_{n-k} Ae_n = \theta .$$

Рассмотрим вектор

$$x = \alpha_1 e_{k+1} + ... + \alpha_{n-k} e_n . \qquad (7)$$

Тогда $Ax = A(\alpha_1 e_{k+1} + ... + \alpha_{n-k} e_n) = \alpha_1 Ae_{k+1} + ... + \alpha_{n-k} Ae_n = \theta$, т.е. $x \in Ker\,A$, и следовательно, существуют числа $\beta_1, ..., \beta_k$, такие, что

$$x = \beta_1 e_1 + ... + \beta_k e_k . \qquad (8)$$

Таким образом, для вектора x мы получили два представления (7) и (8), что противоречит единственности разложения вектора x по базису $e_1,..., e_n$. Полученное противоречие доказывает линейную независимость элементов $Ae_{k+1},..., Ae_n$.

Итак, мы показали, что $n - k$ элементов $Ae_{k+1},..., Ae_n$ подпространства $\operatorname{Im} A$ линейно независимы и для любого элемента $y \in \operatorname{Im} A$ существует представление (6), т.е. $Ae_{k+1},..., Ae_n$ есть базис подпространства $\operatorname{Im} A$. Следовательно, $\dim(\operatorname{Im} A) = n - k$. Отсюда уже следует утверждение теоремы. #

Справедлива, в некотором смысле, обратная теорема.

Теорема 2. Для любых двух подпространств X' и X'' n-мерного пространства X, таких, что $\dim X' + \dim X'' = n$, существует оператор $A \in L\ (X)$, для которого $Ker\, A = X',\ \operatorname{Im} A = X''$.

Доказательство. Пусть $\dim X' = k,\ \dim X'' = n - k.$ Выберем в пространстве X' базис $e_1, e_2,..., e_k$. Дополним его (согласно теореме о неполном базисе) элементами $e_{k+1},..., e_n$ до базиса во всем пространстве X. В подпространстве X'' выберем некоторый базис $\hat{e}_1, \hat{e}_2,..., \hat{e}_{n-k}$. Для того чтобы задать линейный оператор, как отмечалось уже выше, достаточно задать его на базисных векторах. Определим значения линейного оператора A на базисных векторах $e_1, e_2,..., e_n$ пространства X следующим образом:

$$Ae_1 = \theta,\ Ae_2 = \theta,\ Ae_k = \theta;$$

$$Ae_{k+1} = \hat{e}_1,\ Ae_{k+2} = \hat{e}_2,..., Ae_n = \hat{e}_{n-k}.$$

Так определенный оператор, очевидно, обладает требуемыми свойствами. #

3. Обратный оператор

Определение 3. Если для оператора $A \in L\ (X)$ существует такой оператор B, что $AB = BA = I$, то B называется обратным по отношению к A, а оператор A называется обратимым.

Обратный оператор для оператора A принято обозначать символом A^{-1}.

Утверждение 4. Если для оператора $A \in L\ (X)$ существует A^{-1}, то

1) $A^{-1} \in L\ (X)$, т.е. A^{-1} – тоже линейный;

2) A^{-1} определен однозначно.

Доказательство. 1) следует из линейности оператора A и очевидной цепочки равенств, справедливых для любых $x, y \in X$ и любых чисел λ, μ:

$$A^{-1}(\lambda x + \mu y) = A^{-1}(\lambda\, (AA^{-1})\, x + \mu\, (AA^{-1})\, y) = A^{-1}(\lambda A\, (A^{-1}x) +$$

$$+\ \mu A\,(A^{-1}y)) = A^{-1}A\,(\lambda A^{-1}x + \mu A^{-1}y) = \lambda A^{-1}x + \mu A^{-1}y$$

2) пусть для A существует два обратных оператора B_1 и B_2, т.е. $AB_1 = B_1A = I$ и $AB_2 = B_2A = I$. Тогда

$$B_1 = B_1 I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2\,.\ \#$$

Определение 4. Оператор $A \in L\ (X)$ действует взаимно однозначно в X, если различные элементы из X оператор A переводит снова в различные элементы.

Утверждение 5. Пусть оператор $A \in L\ (X)$ действует взаимно однозначно в X, тогда оператор A отображает X на себя, т.е. любой элемент из X имеет в X прообраз.

Доказательство. Покажем, что оператор A любой базис $e_1,\ e_2,\dots,e_n$ пространства X снова переводит в базис $Ae_1, Ae_2,\dots, Ae_n$ этого же пространства. Для этого достаточно показать, что любые n линейно-независимых элементов $e_1,\dots,e_n$ пространства X оператором A отображаются в n линейно-независимых элементов $Ae_1, Ae_2,\dots, Ae_n$.

Итак, пусть $e_1, e_2,\dots, e_n$ линейно независимы. Если линейная комбинация $\lambda_1Ae_1, \lambda_2Ae_2,\dots, \lambda_nAe_n$ представляет собой нулевой элемент пространства X, т.е.

$$\lambda_1Ae_1 + \lambda_2Ae_2 + \dots + \lambda_nAe_n = \theta\,,$$

то в силу линейности оператора A имеем:

$$A(\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \dots + \lambda_ne_n) = \theta\,.$$

Так как оператор A действует взаимно однозначно в X, то $\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \dots + \lambda_ne_n = \theta$. Но элементы $e_1, e_2,\dots, e_n$ линейно независимы, поэтому $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Следовательно, элементы $Ae_1, Ae_2,\dots, Ae_n$ линейно независимы и поэтому образуют базис пространства X.

Далее пусть y – произвольный элемент пространства X. Тогда существуют числа $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots, \alpha_n$, такие, что:

$$y = \alpha_1Ae_1 + \alpha_2Ae_2 + \dots + \alpha_nAe_n = A(\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \dots + \alpha_ne_n)\,.$$

Из последнего равенства следует, что элемент

$$x = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \dots + \alpha_ne_n$$

является прообразом элемента y. #

Имеет место следующий критерий обратимости оператора $A \in L(V_n)$.

Теорема 3. Оператор $A \in L(V_n)$ обратим тогда и только тогда, когда A действует взаимно однозначно в V_n.

Доказательство. **Необходимость**. Пусть оператор A имеет обратный, но оператор A не действует взаимно однозначно, в V_n, т.е. существуют элементы x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$, такие, что $Ax_1 = Ax_2$. Но тогда $x_1 - x_2 = I\,(x_1 - x_2) = A^{-}$

$^{1}A\ (x_1 - x_2) = A^{-1}\ (Ax_1 - Ax_2) = A^{-1}\ (\theta) = \theta$. Следовательно, $x_1 = x_2$, что противоречит нашему предположению. Полученное противоречие и доказывает, что оператор A действует взаимно однозначно в V_n.

Достаточность. Пусть оператор A действует взаимно однозначно в V_n. Тогда согласно предыдущему утверждению для каждого $y \in V_n$ существует элемент $x \in V_n$, такой, что

$$y = Ax. \qquad (7a)$$

Таким образом, каждому элементу $y \in V_n$ ставится в соответствие элемент $x \in V_n$, т.е. определен оператор B:

$$x = By, \qquad (8a)$$

причем $y = Ax$. Подставляя в (7a) представление (8a), получаем

$y = Ax = A\ (By) = (AB)\ y$ для любого $y \in V_n$.

Отсюда согласно определению равенства операторов получим

$$AB=I. \qquad (9)$$

Аналогично, подставляя в (8a) выражение (7a), получаем

$x = By = B\ (Ax) = (BA)\ x$ для любого $x \in V_n$.

Следовательно,

$$BA = I. \qquad (10)$$

Из (9) и (10) следует, что оператор A обратим. #