Лекция 7. Матрица оператора

1. Матрица линейного оператора

Пусть A – оператор из L (V_n) (V_n – n-мерное линейное пространство) и пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ – базис пространства V_n (этот базис обозначим $[e]=[e_1, e_2, ..., e_n]$). Оператор A переводит элементы e_k в Ae_k, k = 1, 2,…, n. Разложим векторы $Ae_1, Ae_2, ..., Ae_n$ по базису [e]:

$$\begin{aligned} Ae_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ... + a_{n1}e_n, \\ Ae_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{n2}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ae_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + ... + a_{nn}e_n \end{aligned} \qquad (1)$$

или кратко

$$\begin{bmatrix} Ae_1 \\ Ae_2 \\ \vdots \\ Ae_n \end{bmatrix} = (A_e)^T \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}, \text{ где } A_e = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

и $(A_e)^T$ – матрица транспонированная к A_e.

Определение 1. Матрица A_e называется матрицей линейного оператора A в базисе [e].

Отметим, что в k-ом столбце матрицы A_e стоят координаты вектора Ae_k (k = 1, 2,…, n) в базисе [e].

Замечание 1. Равенство (1) можно кратко записать следующим образом:

$$Ae_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, e_i, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2)$$

Очевидно, матрицей нулевого и единичного оператора в любом базисе [e] являются соответственно нулевая и единичная матрицы.

Утверждение 1. 1. Любому оператору $A \in L$ (V_n) можно поставить в соответствие матрицу A_e в базисе [e], причем матрица A_e определена единственным образом.

2. Пусть в линейном пространстве V_n задан базис [e] и пусть задана квадратная матрица $A=[a_{ik}]$ n-го порядка. Тогда существует единственный оператор $A \in L(V_n)$, матрицей которого в заданном базисе [e] является матрица A.

Доказательство. 1. Существование для каждого оператора A матрицы A_e этого оператора в базисе [e] следует из ее определения, а единственность следует из единственности разложения любого вектора по базису.

2. Как уже отмечалось выше, для того чтобы задать линейный оператор A достаточно определить его на базисных векторах. Поставим в соответствие каждому вектору e_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, вектор Ae_k, определенный равенством (2), полагая в этом соотношении a_{ik} равными соответствующим элементам заданной матрицы A. Очевидно, что так определенный оператор линеен и, кроме того, из (2) следует его единственность. Наконец, из определения матрицы линейного оператора в базисе $[e]$ следует, что матрица этого линейного оператора совпадает с A. #

<u>**Замечание 2.**</u> Таким образом, между линейными операторами $A \in L\,(V_n)$ и квадратными матрицами порядка n устанавливается взаимно однозначное соответствие в любом фиксированном базисе $[e]$.

Фиксируем в линейном пространстве V_n базис $[e]=[e_1,e_2,\ldots,e_n]$. Пусть x – произвольный элемент V_n, $x=\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ и пусть A – линейный оператор из $L\,(V_n)$. Предположим, что $y = Ax$ и $y=\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. Тогда в силу линейности оператора A и равенств (2) можно записать следующую цепочку равенств:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i e_i = y = Ax = A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k A e_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k a_{ik}\right) e_i, \text{ т.е. } \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k a_{ik}\right) e_i .$$

Отсюда в силу единственности разложения по базису получим

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3)$$

Сопоставим каждому вектору $x \in V_n$ n-мерный вектор-столбец $\underset{\downarrow}{x}$, составленный из координат этого вектора в базисе $[e]$. Аналогично, каждому вектору $y = Ax \in V_n$ сопоставим n-мерный вектор столбец $\underset{\downarrow}{y}$, составленный из координат этого вектора в том же базисе $[e]$. Тогда связь между координатами вектора x и вектора $y = Ax$ можно записать в силу (3) матричным соотношением:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = A_e \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ или } [\underset{\downarrow}{y}] = A_e [\underset{\downarrow}{x}]. \qquad (4)$$

<u>**Утверждение**</u> <u>2.</u> Если два оператора A и B равны, то равны и их матрицы в любом базисе и обратно, если матрицы A_e и B_e линейных операторов A и

B равны в каком-нибудь базисе $[e]$, то и соответствующие им операторы A и B также равны.

Доказательство. Из определения равенства двух операторов имеем для любого базиса $[e]: Ae_k = Be_k$, $k = 1, 2,\ldots, n$. Тогда из единственности разложения по базису и определения матрицы линейного оператора получим $A_e=B_e$. Обратное утверждение следует из утверждение 9.6. #

В дальнейшем потребуется следующая важная

Лемма 1. Если для любого $[\underset{\downarrow}{x}]\in \mathbf{R_n}$ имеет место равенство

$$A\,[\underset{\downarrow}{x}] = B\,[\underset{\downarrow}{x}], \qquad (5)$$

где A и B – квадратные матрицы порядка n, то

$$A = B.$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно в равенстве (5) взять $[\underset{\downarrow}{x}] = [e_k]^T = [0, 0,\ldots, 1, 0,\ldots, 0]^T$ (единица стоит на k-ом месте), $k = 1, 2,\ldots, n$, и воспользоваться определением равенства матриц. #

Утверждение 3. Если $A\in L\ (V_n)$, $B\in L\ (V_n)$, а A_e и B_e – соответственно их матрицы в базисе $[e]$, то

1) $(A + B)_e = A_e + B_e$;

2) $(\lambda B)_e = \lambda B_e$ для любого $\lambda \in \mathbf{R}\ (\mathbf{C})$;

3) $(AB)_e = A_e B_e$;

4) если A – обратим, то $(A^{-1})_e = (A_e)^{-1}$.

Доказательство. 1) Согласно определению суммы операторов имеем $(A + B)\ x = Ax + Bx$ для любого $x\in V_n$. Записывая это равенство в матричном виде, получаем

$$(A+B)_e[\underset{\downarrow}{x}] = A_e[\underset{\downarrow}{x}] + B_e[\underset{\downarrow}{x}]$$

или $$(A + B)_e[\underset{\downarrow}{x}] = (A_e + B_e)\,[\underset{\downarrow}{x}].$$

Воспользовавшись предыдущей леммой, получим

$$(A + B)_e = A_e + B_e;$$

2) из определения умножения оператора на число следует, что $(\lambda A)\, x = \lambda\,(Ax)$ для любого $x\in V_n$ или в матричной форме $(\lambda A)_e[\underset{\downarrow}{x}] = \lambda\,(A_e[\underset{\downarrow}{x}]) = \lambda A_e[\underset{\downarrow}{x}]$. Отсюда согласно лемме 1 имеем $(\lambda A)_e = \lambda A_e$;

3) из определения произведения двух операторов имеем:

$$(AB)\ x = A\ (Bx) \text{ для любого } x\in V_n.$$

Записывая это равенство в базисе $[e]$ в матричном виде, получаем: $(AB)_e[\underset{\downarrow}{x}] = A_e(B_e[\underset{\downarrow}{x}])$, или согласно ассоциативности умножения матриц

$(AB)_e [\underset{\downarrow}{x}] = (A_eB_e) [\underset{\downarrow}{x}]$. Отсюда, воспользовавшись леммой 9.1, получим: $(AB)_e = (A_eB_e)$;

4) пусть оператор A обратим, т.е. существует оператор A^{-1} такой, что $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Отсюда, согласно утверждению 7 и п. 3 имеем

$$A_e (A^{-1})_e = (A^{-1})_e A_e = (I)_e = E.$$

Из этого равенства и определения обратной матрицы следует, что $(A_e)^{-1} = (A^{-1})_e$. #

<u>Следствие</u> <u>2.</u> $\dim L(V_n) = n^2$.

Доказательство. Согласно утверждениям 9.6 и 9.8 пространство $L(V_n)$ изоморфно пространству квадратных матриц порядка n, размерность которого равна n^2. #

<u>Пример</u> <u>1.</u> Пусть A – оператор поворота плоскости на угол φ, а $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – ОНБ на плоскости. Очевидно,

$$A\vec{e}_1 = \cos\varphi \vec{e}_1 + \sin\varphi \vec{e}_2, \quad A\vec{e}_2 = -\sin\varphi \vec{e}_1 + \cos\varphi \vec{e}_2 .$$

Следовательно,

$$A_e = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

<u>Пример</u> <u>2.</u> Пусть в трехмерном евклидовом пространстве V_3 геометрических векторов выбран ОНБ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и задан оператор A равенством: $A\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}]$, где $\vec{a} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ – фиксированный вектор (координаты его заданы в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$). Тогда, очевидно,

$$A\vec{e}_1 = [\vec{e}_1, \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3] = \beta[\vec{e}_1, \vec{e}_2] + \gamma[\vec{e}_1, \vec{e}_3] = -\gamma\vec{e}_2 + \beta\vec{e}_3 ;$$

$$A\vec{e}_2 = [\vec{e}_2, \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3] = \alpha[\vec{e}_2, \vec{e}_1] + \gamma[\vec{e}_2, \vec{e}_3] = \gamma\vec{e}_1 - \alpha\vec{e}_3 ;$$

$$A\vec{e}_3 = [\vec{e}_3, \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3] = \alpha[\vec{e}_3, \vec{e}_1] + \beta[\vec{e}_3, \vec{e}_2] = -\beta\vec{e}_1 + \alpha\vec{e}_2 .$$

Следовательно,

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

<u>Пример</u> <u>3.</u> Пусть M_n – пространство многочленов степени $\le n-1$. Рассмотрим в нем оператор дифференцирования A:

$$AP(t) = \frac{d}{dt}[P(t)].$$

Выберем в пространстве M_n базис: $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2, \ldots, e_n = t^{n-1}$. Тогда $Ae_1 = 0$, $Ae_2 = 1 = e_1$, $Ae_3 = 2t = 2e_2, \ldots, Ae_n = \; = (n-1)t^{n-2} = (n-1)e_{n-1}$. Следовательно, матрица оператора A в этом базисе имеет вид:

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 4. В пространстве $V = V' \oplus V''$ $(\dim V' = k,\ \ \dim V'' = n-k)$ рассмотрим оператор проектирования пространства V на подпространство V' в направлении подпространства V''. Пусть $e_1,\ e_2, \dots,\ e_k,\ e_{k+1}, \dots,\ e_n$ – произвольный базис пространства V, такой, что $e_1,\ e_2, \dots,\ e_k$ принадлежат подпространству V', т.е. $e_1,\ e_2, \dots,\ e_k$ – базис V', тогда, очевидно,

$$Ae_1 = e_1,\ \ Ae_2 = e_2, \dots,\ \ Ae_k = e_k;$$

$$Ae_{k+1} = \theta,\ \ Ae_{k+2} = \theta, \dots,\ \ Ae_n = \theta.$$

Следовательно,

$$A_e = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\\vdots\\0\end{array}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\\vdots\\0\end{array}}\right\} n-k \end{array}$$

2. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат вектора при изменении базиса

Пусть в пространстве V_n фиксированы два базиса $[e]=[e_1,\ e_2, \dots,\ e_n]$ и $[\hat{e}] = [\hat{e}_1,\ \hat{e}_2, \dots,\ \hat{e}_n]$. Разложим векторы $\hat{e}_1,\ \hat{e}_2, \dots,\ \hat{e}_n$ по базису $[e]$:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \ldots + t_{n1}e_n; \\ \hat{e}_2 &= t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \ldots + t_{n2}e_n; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{e}_n &= t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \ldots + t_{nn}e_n. \end{aligned} \qquad (6)$$

Из коэффициентов этих разложений составим матрицу

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

Определение 2. Матрица T называется матрицей перехода от базиса $[e]$ к базису $[\hat{e}]$.

Равенство (6) с помощью матрицы T можно кратко записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \vdots \\ \hat{e}_n \end{bmatrix} = T^T \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}, \qquad (7)$$

где T^T – матрица транспонированная к T.

Для построения матрицы T перехода от базиса $[e]$ к базису $[\hat{e}]$ необходимо векторы $\hat{e}_1,\ \hat{e}_2, \ldots,\ \hat{e}_n$ разложить по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$, тогда столбцами матрицы T являются координаты векторов $\hat{e}_1,\ \hat{e}_2, \ldots,\ \hat{e}_n$ в базисе $[e]$.

Замечание 4. Отметим, что $\det T$ всегда отличен от нуля (в противном случае столбцы матрицы T, а следовательно, и векторы $\hat{e}_1,\ \hat{e}_2, \ldots,\ \hat{e}_n$ линейно зависимы).

Далее возьмем произвольный элемент $x \in V_n$ и разложим его по векторам обоих базисов $[e]$ и $[\hat{e}]$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \hat{e}_i \, .$$

Эти равенства можно записать в виде:

$$x = [x_1, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = [\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n] \begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \vdots \\ \hat{e}_n \end{bmatrix}.$$

Отсюда согласно (7) имеем:

$$[x_1, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = [\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n] \begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \vdots \\ \hat{e}_n \end{bmatrix} = [\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n]\, T^T \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}.$$

Транспонируя это равенство, получаем

$$[e_1, \ldots, e_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [e_1, \ldots, e_n]\, T \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}.$$

Отсюда согласно единственности разложения по базису следует, что

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad [\underset{\downarrow}{x}] = T\,[\underset{\downarrow}{\hat{x}}]. \qquad (8)$$

Вывод 1. Если в V_n заданы два базиса $[e]$ и $[\hat{e}]$ с матрицей перехода T от «старого» базиса $[e]$ к «новому» базису $[\hat{e}]$, то

$$[\underset{\downarrow}{\hat{e}}] = T^T [\underset{\downarrow}{e}] \quad \text{и} \quad [\underset{\downarrow}{x}] = T\,[\underset{\downarrow}{\hat{x}}].$$

3. Изменение матрицы оператора при изменении базиса

Пусть в линейном пространстве V_n задан линейный оператор A и два базиса $[e]=[e_1, e_2,...,e_n]$ и $[\hat{e}]=[\hat{e}_1, \hat{e}_2,...,\hat{e}_n]$. Обозначим через T матрицу перехода от базиса $[e]$ к базису $[\hat{e}]$, а через A_e и $A_{\hat{e}}$ – матрицы оператора A в базисах $[e]$ и $[\hat{e}]$ соответственно. Тогда, записывая равенство $y = Ax$ для произвольного x в матричном виде в базисах $[e]$ и $[\hat{e}]$ соответственно, получаем

$$[\underset{\downarrow}{y}] = A_e[\underset{\downarrow}{x}],\ \ [\underset{\downarrow}{\hat{y}}] = A_{\hat{e}}[\underset{\downarrow}{\hat{x}}],$$

где $[\underset{\downarrow}{x}]$ и $[\underset{\downarrow}{\hat{x}}]$ – координатные столбцы одного и того же вектора x соответственно в базисах $[e]$ и $[\hat{e}]$, а $[\underset{\downarrow}{y}]$ и $[\underset{\downarrow}{\hat{y}}]$ – координатные столбцы вектора y соответственно в базисах $[e]$ и $[\hat{e}]$. Из последних равенств согласно (8) получим

$$T[\underset{\downarrow}{\hat{y}}] = [\underset{\downarrow}{y}] = A_e[\underset{\downarrow}{x}] = A_e T[\underset{\downarrow}{\hat{x}}].$$

Отсюда

$$[\underset{\downarrow}{\hat{y}}] = T^{-1}A_e T[\underset{\downarrow}{\hat{x}}].$$

Так как $[\underset{\downarrow}{\hat{y}}] = A_{\hat{e}}[\underset{\downarrow}{\hat{x}}]$, то

$$A_{\hat{e}}[\underset{\downarrow}{\hat{x}}] = T^{-1}A_e T[\underset{\downarrow}{\hat{x}}].$$

Из этого равенства согласно лемме 9.1, так как x – произвольный, имеем

$$A_{\hat{e}} = T^{-1}A_e T. \qquad (9)$$

<u>Вывод</u> <u>2.</u> Итак, при переходе от базиса $[e]$ к базису $[\hat{e}]$ с матрицей перехода T матрица линейного оператора изменяется по формуле (9).

<u>Следствие</u> <u>3.</u> $\det A_{\hat{e}} = \det A_e$.

Так как определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса, то можно ввести понятие определителя оператора, положив $\det A = \det A_e$, где A_e – матрица линейного оператора в каком-нибудь базисе $[e]$.