Лекция 9. ДВУМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ (ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ). ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ

Функцией распределения двумерной случайной величины (X, Y) называется вероятность совместного выполнения двух событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$:

$$F(x, y) = P(\{X < x\} \cap \{Y < y\}). \quad (1.45)$$

Свойства двумерной функции распределения:

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$.
2. $F(x, +\infty) = F_1(x)$; $F(+\infty, y) = F_2(y)$; $F(+\infty, +\infty) = 1$.
3. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$.
4. $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$, если $x_2 > x_1$;
 $F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$, если $y_2 > y_1$.

Функция распределения может задаваться для непрерывных и дискретных случайных величин.

Для непрерывных случайных величин существует плотность распределения или дифференциальный закон распределения:

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(\{x \leq X < X + \Delta x\} \cap \{y \leq Y < y + \Delta y\})}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (1.46)$$

Свойства двумерной плотности.

1. $f(x, y) \geq 0$.
2. $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$. (1.47)

$$3. P\{(X, Y) \in D\} = \iint_{(D)} f(x, y) dx dy. \quad (1.48)$$

$$4. \text{Условие нормировки. } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1. \quad (1.49)$$

$$5. f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx. \quad (1.50)$$

Для дискретных случайных величин (X, Y) закон распределения задается матрицей вероятностей, содержащей вероятности p_{ij} появления всех возможных пар значений (x_i, y_j) :

$$p_{ij} = P(X = x_i \cap Y = y_j), \quad (1.51)$$

удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p_{ij} = 1. \quad (1.52)$$

Одномерные ряды вероятностей составляющих X, Y определяются по формулам

$$p_{i*} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^M p_{ij}, \quad i = 1, \dots, N; \quad (1.53)$$

$$p_{*j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^N p_{ij}, \quad j = 1, \dots, M. \quad (1.54)$$

Условным законом распределения называется распределение одной случайной величины, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Условные плотности для непрерывных составляющих X и Y определяются по формулам

$$f(x/y) = f(x, y)/f_2(y), \quad f_2(y) \neq 0; \quad (1.55)$$

$$f(y/x) = f(x, y)/f_1(x), \quad f_1(x) \neq 0. \quad (1.56)$$

Условные ряды вероятностей для дискретных составляющих X и Y определяются по формулам

$$p_{i/j} = P(X = x_i / Y = y_j) = p_{ij} / P(Y = y_j), \quad i = 1, \dots, N; \quad (1.57)$$

$$p_{j/i} = P(Y = y_j / X = x_i) = p_{ij} / P(X = x_i), \quad j = 1, \dots, M. \quad (1.58)$$

Теорема умножения законов распределений:

для непрерывных величин -

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f(y/x) = f_2(y) \cdot f(x/y) \quad (1.59)$$

для дискретных величин -

$$p_{ij} = p_{i*} \cdot p_{j/i} = p_{*j} \cdot p_{i/j}. \quad (1.60)$$

Условия независимости случайных величин:

для непрерывных – $f(x, y) = f_1(x)f_2(y), \quad (1.61)$

для дискретных - $p_{ij} = p_i \cdot p_j, \quad \text{для } \forall i, j. \quad (1.62)$

Пример 9.1. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена по закону, приведенному в таблице:

y_j	x_i	
	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
$y_1 = -1$	0,1	0,2
$y_2 = 0$	0,2	0,3
$y_3 = 1$	0	0,2

Определить одномерные ряды вероятностей величин X и Y , условный ряд вероятностей величины X при условии, что $Y = 0$. Исследовать зависимость случайных величин X и Y .

Решение. Определим ряды вероятностей X и Y по формулам (1.53) и (1.54), т.е. выполним суммирование по столбцам и по строкам:

x_j	0	1
p_{i*}	0,3	0,7

y_j	-1	0	1
p^{*j}	0,3	0,5	0,2

Условный ряд X при $Y = 0$ получаем по формуле (1.57):

x_j	0	1
$p_{i/Y}$ =0	0,4	0,6

Величины X и Y зависимы, так как

$$P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0) \cdot P(Y = 0),$$

$$0,2 \neq 0,3 \cdot 0,5.$$

1.9. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим основные числовые характеристики двумерной случайной величины (X, Y) .

Начальный момент порядка $k+s$ равен математическому ожиданию произведения X^k и Y^s :

$$\alpha_{k,s}(x, y) = M[X^k \cdot Y^s]. \quad (1.63)$$

Центральный момент порядка $k+s$ равен математическому ожиданию

произведения центрированных величин $\overset{\circ}{X}^k$ и $\overset{\circ}{Y}^s$:

$$\mu_{k,s}(x, y) = M[\overset{\circ}{X}^k \overset{\circ}{Y}^s], \quad (1.64)$$

где $\overset{\circ}{X} = X - m_x$;

$\overset{\circ}{Y} = Y - m_y$.

Расчетные формулы:

$$\alpha_{k,s}(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^k y_j^s p_{i,j} & \text{для ДСВ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x, y) dx dy & \text{для НСВ} \end{cases} \quad (1.65)$$

$$\mu_{k,s}(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{i,j} & \text{для ДСВ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x, y) dx dy & \text{для НСВ} \end{cases} \quad (1.66)$$

где p_{ij} - элементы матрицы вероятностей дискретной величины (X, Y) ;

$f(x, y)$ -совместная плотность вероятности непрерывной величины (X, Y) .

Рассмотрим наиболее часто используемые начальные и центральные

моменты:

$$\alpha_{0,0}(x, y) = \mu_{0,0}(x, y) = 1;$$

$$\alpha_{1,0}(x, y) = m_x; \quad \alpha_{0,1}(x, y) = m_y;$$

$$\mu_{1,0}(x, y) = \mu_{0,1}(x, y) = 0;$$

$$\alpha_{2,0}(x, y) = \alpha_2(x); \quad \alpha_{0,2}(x, y) = \alpha_2(y);$$

$$\mu_{2,0}(x, y) = D_x; \quad \mu_{0,2}(x, y) = D_y;$$

$$\mu_{1,1}(x, y) = K_{xy}.$$

Корреляционный момент K_{xy} характеризует степень линейной зависимости величин X и Y и рассеивание относительно точки (m_x, m_y) .

Вычислить K_{xy} можно и через начальные моменты:

$$K_{xy} = \alpha_{1,1}(x, y) - m_x \cdot m_y. \quad (1.67)$$

Коэффициент корреляции r_{xy} характеризует степень линейной зависимости величин:

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (1.68)$$

Для любых случайных величин $|r_{xy}| \leq 1$.

Если величины X и Y независимы, то $r_{xy} = 0$.

Пример 10.1 Определить коэффициент корреляции величин X и Y (см. пример 9.1).

Решение. Определим математические ожидания величин X и Y по формуле (1.65):

$$m_x = \alpha_{1,0}(x, y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 x_i p_{ij} = 0 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0,2 +$$

$$+ 1 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 = 0,7,$$

$$m_y = \alpha_{0,1}(x, y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 y_j p_{ij} = -1 \cdot 0,1 - 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,3 +$$

$$+ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0,2 = -0,1.$$

Найдем значение K_{xy} по формуле (1.67):

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 x_i y_j p_{ij} - m_x m_y = 0 \cdot (-1) \cdot 0,1 + 0 \cdot 0 \cdot 0,2 + 0 \cdot 1 \cdot 0 +$$

$$+ 1 \cdot (-1) \cdot 0,2 + 1 \cdot 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 1 \cdot 0,2 - 0,7 \cdot (-0,1) = 0,07.$$

Определим дисперсии величин X и Y по формуле (1.66):

$$D_x = \mu_{2,0}(x, y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (x_i - m_x)^2 p_{ij} = (-0,7)^2 \cdot 0,1 + (-0,7)^2 \cdot 0,2 + (-0,7)^2 \cdot 0 + \\ + (0,3)^2 \cdot 0,2 + (0,3)^2 \cdot 0,3 + (0,3)^2 \cdot 0,2 = 0,21,$$

$$D_y = \mu_{0,2}(x, y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (y_j - m_y)^2 p_{ij} = (-0,9)^2 \cdot 0,1 + (-0,9)^2 \cdot 0,2 + (0,1)^2 \cdot 0,2 + \\ + (0,1)^2 \cdot 0,3 + (1,1)^2 \cdot 0 + (1,1)^2 \cdot 0,2 = 0,49.$$

Значение коэффициента корреляции r_{xy} вычислим по формуле (1.68):

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{0,07}{\sqrt{0,21 \cdot 0,49}} \approx 0,22.$$

Пример 10.2 Двумерная случайная величина равномерно распределена в области D , ограниченной прямыми $X = 0$, $Y = 0$ и $X + Y = 4$. Определить коэффициент корреляции величин X и Y .

Решение. Запишем в аналитической форме совместную плотность вероятности:

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & 0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 4 - x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Определим c , используя условие нормировки (1.49):

$$\int_0^4 \int_0^{4-x} c dx dy = c \int_0^4 (4-x) dx = c \cdot 8 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{8}.$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию величины X по формулам (1.65) и (1.66) соответственно:

$$m_X = \alpha_{1,0}(x, y) = \int_0^4 \int_0^{4-x} x \frac{1}{8} dx dy = \frac{1}{8} \int_0^4 x dx \int_0^{4-x} dy = \frac{1}{8} \int_0^4 x(4-x) dx = \frac{4}{3};$$

$$D_X = \mu_{2,0}(x, y) = \int_0^4 \int_0^{4-x} (x - m_x)^2 \frac{1}{8} dx dy = \frac{1}{8} \int_0^4 (x - \frac{4}{3})^2 (4-x) dx = \frac{8}{9}.$$

Так как область D симметрична относительно осей координат, то величины X и Y будут иметь одинаковые числовые характеристики:

$$m_x = m_y = 4/3, \quad D_x = D_y = 8/9.$$

Определим корреляционный момент K_{xy} по формуле (1.67):

$$K_{xy} = \int_0^4 \int_0^{4-x} xy \frac{1}{8} dx dy - m_x \cdot m_y = \frac{1}{8} \int_0^4 x dx \int_0^{4-x} y dy - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{16} \int_0^4 x(4-x)^2 dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}.$$

Коэффициент корреляции величин X и Y будет равен (1.68):

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = -\frac{1}{2}.$$