

Лекция 8 . ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ СВОЙСТВА

Одна из основных характеристик СВ - **математическое ожидание**:

$$m_X = M[X] = \begin{cases} \sum_i x_i \cdot P\{X = x_i\} & \text{для ДСВ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx & \text{для НСВ.} \end{cases} \quad (1.31)$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение СВ и обладает следующими свойствами:

1. $M[c] = c$.
2. $M[c \cdot X] = c \cdot M[X]$.
3. $M[X+c] = M[X]+c$.
4. $M[X_1+X_2] = M[X_1]+M[X_2]$.

Модой случайной величины называется ее наиболее вероятное значение, т.е. то значение, для которого вероятность p_i (для дискретной СВ) или $f(x)$ (для непрерывных СВ) достигают максимума. Обозначения: Mx , Mo .

Медианой случайной величины X называется такое ее значение, для которого выполняется условие $P\{X < Me\} = P\{X \geq Me\}$. Медиана, как правило, существует только для непрерывных случайных величин.

Квантилью χ_p случайной величины X является такое ее значение, для которого выполняется условие $P\{X < \chi_p\} = F(\chi_p) = p$.

Начальный момент s -го порядка СВ X есть математическое ожидание s -й степени этой случайной величины: $\alpha_s = M[X^s]$.

Центрированной случайной величиной называется отклонение СВ от математического ожидания:

$$\overset{\circ}{X} = X - m_X, \quad M[\overset{\circ}{X}] = M[X - m_X] = 0.$$

Моменты центрированной случайной величины - *центральные моменты*. **Центральный момент** порядка s СВ X есть математическое ожидание s -й степени центрированной случайной величины:

$$\mu_s = M[\overset{\circ}{X}^s] = M[(X - m_X)^s].$$

Для любой случайной величины центральный момент первого порядка равен 0.

Дисперсия случайной величины есть математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины.

Расчетные формулы:

$$D[X] = \begin{cases} \sum_i (x_i - m_X)^2 \cdot P\{X = x_i\} = \sum_i x_i^2 \cdot P\{X = x_i\} - (m_X)^2, & \text{для ДСВ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - (m_X)^2, & \text{для НСВ} \end{cases} \quad (1.32)$$

Вычислить дисперсию можно и через второй начальный момент:

$$D[X] = M[X^2] - m_X^2.$$

Дисперсия случайной величины характеризует степень рассеивания (разброса) значений случайной величины относительно ее математического ожидания и обладает следующими свойствами:

1. $D[c] = 0$.
2. $D[X+c] = D[X]$.
3. $D[c \cdot X] = c^2 \cdot D[X]$.
 $\sigma[c \cdot X] = c \cdot \sigma[X]$.

Средним квадратическим отклонением (СКО) СВ X называется характеристика

$$\sigma_X = \sigma[X] = \sqrt{D[X]}. \quad (1.33)$$

СКО измеряется в тех же физических единицах, что и СВ, и характеризует ширину диапазона значений СВ.

Правило 3 σ . Практически все значения СВ находятся в интервале:

$$[m - 3\sigma; m + 3\sigma]. \quad (1.34)$$

Пример 6.1. Из партии численностью 25 изделий, среди которых имеется шесть нестандартных, случайным образом выбраны три изделия. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нестандартных изделий, содержащихся в выборке.

Решение. По условию задачи СВ X принимает следующие значения: $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$; $x_4=3$. Вероятность того, что в этой выборке окажется ровно i ($i = 0, 1, 2, 3$) нестандартных изделий, вычисляется по формуле

$$p_i = P\{X = x_i\} = \frac{C_6^i \cdot C_{19}^{3-i}}{C_{25}^3},$$

откуда $p_1=0,41; p_2=0,43; p_3=0,11; p_4=0,05$.

Дисперсию определим по формулам

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2,$$

$$M[X] = 0 \cdot 0,41 + 1 \cdot 0,43 + 2 \cdot 0,11 + 3 \cdot 0,05 = 0,8,$$

$$M[X^2] = 0 \cdot 0,41 + 1 \cdot 0,43 + 2^2 \cdot 0,11 + 3^2 \cdot 0,05 = 1,32,$$

$$D[X] = 1,32 - (0,8)^2 = 0,68.$$

$$\text{Тогда } \sigma[X] = \sqrt{D[X]} = 0,82.$$

Пример 6.2. Непрерывная СВ распределена по закону Лапласа: $f(x) = b \cdot e^{-|x|}$

Найти коэффициент b , математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$, среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$.

Решение. Для нахождения коэффициента b воспользуемся свойством нормировки плотности распределения $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2 \cdot b \int_0^{\infty} e^{-x}dx = 2 \cdot b = 1$, откуда

$$b = 1/2. \text{ Так как функция } x \cdot e^{-|x|} \text{ - нечетная, то } M[X] = 0,5 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-|x|}dx = 0,$$

дисперсия $D[X]$ и СКО $\sigma[X]$ соответственно равны:

$$D[X] = 0,5 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-|x|}dx = 2 \cdot 0,5 \cdot \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x}dx = 2,$$

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{2}.$$

1.7. ТИПОВЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1.7.1 Показательное (экспоненциальное) распределение

Случайная величина T имеет **показательное** распределение, если ее плотность вероятности:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad (1.35)$$

функция распределения:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad (1.36)$$

числовые характеристики:

$$M[T] = 1/\lambda, \quad D[T] = 1/\lambda^2. \quad (1.37)$$

1.7.2. Равномерное распределение

СВ X имеет равномерное распределение на участке $[a, b]$, если ее плотность вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a, x > b \end{cases}, \quad (1.38)$$

функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x-a)/(b-a), & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}, \quad (1.39)$$

числовые характеристики:

$$M[X] = \frac{a+b}{2}, \quad D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (1.40)$$

1.7.3. Нормальный закон распределения

СВ X имеет нормальное распределение, если ее плотность вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (1.41)$$

функция распределения:

$$F(x) = 0,5 + 0,5 \cdot \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \quad (1.42)$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа: $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Значения функции Лапласа приведены в Приложении. При использовании таблицы значений функции Лапласа следует учитывать :

$$\Phi(-x) = -\Phi(x), \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi(\infty) = 1.$$

Числовые характеристики:

$$M[X] = m, \quad D[X] = \sigma^2. \quad (1.43)$$