Лекция 3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Допустим, что проводится некоторый опыт, об условиях которого можно сделать n исключающих друг друга предположений (*гипотез*): $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$, $H_i \cap H_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Событие A может появляться совместно с одной из гипотез H_i. Событие A можно представить как сумму n несовместных событий: $A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \ldots \cup (A \cap H_n)$.

По правилу сложения вероятностей $\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i \cap A)$.

По правилу умножения вероятностей $\mathrm{P}(H_i \cap A) = \mathrm{P}(H_i) \cdot \mathrm{P}(A/H_i)$. Тогда **полная вероятность** события A равна

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i) \cdot \mathrm{P}(A/H_i). \qquad (1.19)$$

Следствием правила умножения и формулы полной вероятности является ***формула Байеса***.

Вероятность наступления события A совместно с гипотезой H_k определяется с использованием теоремы умножения вероятностей:

$$\mathrm{P}(A \cap H_k) = \mathrm{P}(H_k) \cdot \mathrm{P}(A/H_k) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(H_k/A).$$

Таким образом, можно записать:

$$\mathrm{P}(H_k/A) = \mathrm{P}(H_k) \cdot \mathrm{P}(A/H_k)/\mathrm{P}(A).$$

С использованием формулы полной вероятности

$$P(H_k)/A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)}. \qquad (1.20)$$

Пример 3.1. В продажу поступили телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 10% телевизоров с дефектом, второго — 5% и третьего 3%. Какова вероятность купить неисправный телевизор, если в магазин поступило 25 % телевизоров с первого завода, 55% — со второго и 20% — с третьего?

Решение. С рассматриваемым событием A={приобретенный телевизор оказался с дефектом } связано три гипотезы: H_1={телевизор выпущен первым заводом}, H_2={выпущен вторым заводом }, H_3={выпущен третьим заводом}. Вероятности этих событий определяются из условия задачи: P(H_1)=0,25; P(H_2)=0,55; P(H_3)=0,2. Условные вероятности события А также определяются из условия задачи: P(A/H_1)=0,1; P(A/H_2)=0,05; P(A/H_3)=0,03. Отсюда по формуле полной вероятности следует:

$$\mathrm{P}(A) = 0{,}25\cdot 0{,}1 + 0{,}55\cdot 0{,}05 + 0{,}2\cdot 0{,}03 = 0{,}0585.$$

Пример 3.2. На вход радиоприемного устройства с вероятностью 0,9 поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью 0,1 только помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то приемник с вероятностью 0,8 регистрирует наличие сигнала, если поступает только помеха, то регистрируется наличие сигнала с вероятностью 0,3. Известно, что приемник показал наличие сигнала. Какова вероятность того, что сигнал действительно пришел?

Решение. С рассматриваемым событием A={приемник зарегистрировал наличие сигнала} связано две гипотезы H_1={пришел сигнал и помеха}, H_2={пришла только помеха}. Вероятности этих гипотез P(H_1)=0,9, P(H_2)=0,1. Условные вероятности события A по отношению к гипотезам H_1 и H_2 находим из условия задачи: P(A/H_1)=0,8, P(A/H_2)=0,3.

Требуется определить условную вероятность гипотезы H_1 по отношению к событию A, для чего воспользуемся формулой Байеса:

$$\mathrm{P}(H_1 / A) = \frac{\mathrm{P}(H_1)\cdot \mathrm{P}(A/H_1)}{\mathrm{P}(H_1)\cdot \mathrm{P}(A/H_1) + \mathrm{P}(H_2)\cdot \mathrm{P}(A/H_2)} = \frac{0{,}9\cdot 0{,}8}{0{,}9\cdot 0{,}8 + 0{,}1\cdot 0{,}3} = 0{,}96.$$

3.3. Для решения вопроса идти в кино или на лекцию студент подбрасывает монету. Если студент пойдет на лекцию, он разберется в теме с вероятностью 0,9, а если в кино - с вероятностью 0,3. Какова вероятность того, что студент разберется в теме?

Решение. Применим формулу полной вероятности (1.19). Пусть А - событие, состоящее в том, что студент разобрался в теме, событие (гипотеза) H_1 - студент идет в кино, H_2 - студент идет на лекцию. Известны из условия задачи следующие вероятности:

$P(H_1)=P(H_2)=0{,}5$; $P(A/H_1)=0{,}3$; $P(A/H_2)=0{,}9$.

Искомая вероятность события А будет равна

$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/ H_1)+ P(H_2) \cdot P(A/ H_2)=0{,}5 \cdot 0{,}3+0{,}5 \cdot 0{,}9=0{,}6.$

3.4. Пусть одна монета из 10000000 имеет герб с обеих сторон, остальные монеты обычные. Наугад выбранная монета бросается десять раз, причем во всех бросаниях она падает гербом кверху. Какова вероятность того, что была выбрана монета с двумя гербами?

Решение. Применим формулу Байеса (3.2). Пусть событие А - монета десять раз подряд падает гербом кверху. Гипотезы: H_1 - выбрана нормальная монета; H_2 - выбрана монета с двумя гербами. По условию задачи необходимо определить условную вероятность $P(H_2/A)$. Неизвестные в формуле (1.20) вероятности равны

$P(H_1)=0{,}9999999$; $P(H_2)=10^{-7}$;

$P(A/H_1)=0{,}5^{10}$; $P(A/H_2)=1$.

Следовательно,

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)}=$$

$$=\frac{10^{-7}\cdot 1}{10^{-7}\cdot 1+0{,}9999999\cdot 0{,}5^{10}}\approx 1{,}02\cdot 10^{-4}.$$

1.4. ПОВТОРЕНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ОПЫТОВ

Пусть производится n независимых опытов. В результате каждого опыта событие A появляется с вероятностью p и не появляется с вероятностью $1-p$. Вероятность $P(n,k)$ того, что в последовательности из n опытов интересующее нас событие А произойдет ровно k раз (**формула Бернулли**) равна

$$P(n,k)=C_n^k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}. \qquad (1.21)$$

Пусть производится серия из n независимых испытаний, в результате каждого из которых может появиться одно из событий A_1, A_2, ..., A_r с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_r$ соответственно.

Вероятность того, что в серии из n испытаний событие A_1 наступит ровно k_1 раз, событие A_2 — k_2 раз, ... , событие A_r — k_r раз ($k_1 + ... + k_r = n$) равна

$$\mathrm{P}(n,k_1,...,k_r) = \frac{n!}{k_1!...k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_r^{k_r}. \tag{1.22}$$

Локальная теорема Лапласа

Вероятность того, что в n независимых испытаниях (n-достаточно большое число), в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие наступит ровно k раз, приближенно равна

$$\mathrm{P}(n,k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \tag{1.23}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \qquad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1-p.$$

Интегральная теорема Лапласа

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых некоторое событие появляется с вероятностью p , событие наступит не менее k_1 и не более k_2 раз, приближенно равна

$$\mathrm{P}(n,\ k_1 \le k \le k_2) = (\Phi(x_2) - \Phi(x_1))/2, \tag{1.24}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \text{ - функция Лапласа,}$$

$$x_1 = \frac{(k_1 - np)}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{(k_2 - np)}{\sqrt{npq}}.$$

Пример 4.1. По каналу связи передается $n = 6$ сообщений, каждое из которых независимо от других, с вероятностью $p = 0{,}2$ оказывается искаженным. Найти вероятности следующих событий:

A = {ровно два сообщения из 6 искажены},

B = {не менее двух сообщений из 6 искажены},

C = {все сообщения будут переданы без искажений},

D = {все сообщения будут искажены}.

Решение. По формуле Бернулли (1.21)

$$\mathrm{P}(A) = C_6^2 \cdot p^2 \cdot (1-p)^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}197,$$

Р(B) = Р(6,2) + Р(6,3) + Р(6,4) + Р(6,5) + Р(6,6) = 1- Р(6,0) - Р(6,1) =

$$= 1 - C_6^0 \cdot p^0 \cdot (1-p)^6 - C_6^1 \cdot p^1 \cdot (1-p)^5 = 1 - 0{,}8^6 - 6 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}345,$$

$$P(C) = (1-p)^6 = 0{,}262, \qquad P(D) = p^6 = 0{,}2^6 = 0{,}000064.$$

Пример 4.2. Вероятность появления события A за время испытаний равна 0,8. Определить вероятность того, что в 100 испытаниях событие A появится: а) 80 раз; б) не менее 75 и не более 90 раз; в) не менее 75 раз.

Решение

1) Воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа:

$$\mathrm{P}(100{,}80) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}, \qquad x = \frac{80 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 0.$$

φ(0) = 0,3989, тогда Р(100,80) = 0,0997.

2) Согласно интегральной теореме Муавра-Лапласа

$$\mathrm{P}(100{,}75<k<90) = (\Phi\left(\frac{90-80}{4}\right) - \Phi\left(\frac{75-80}{4}\right))/2 = (\Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25))/2 = (\Phi(2{,}5) +$$

$$+ \Phi(1{,}25))/2.$$

Значение функции Лапласа определяем по таблице Лапласа Ф(2,5)=0,9876;

Ф(1,25) = 0,7888. Р(100, 75<k<90)=0,8882.