Лекция №5

ГЛАВА II

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 4. Определение предела последовательности. Свойства сходящихся последовательностей

1. Числовые последовательности. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое вещественное число x_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* (или просто последовательность)

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Кратко последовательность обозначают символом $\{x_n\}$ или (x_n), при этом x_n называют *членом* или *элементом* этой последовательности, n — номером члена x_n.

Числовая последовательность — это функция, область определения которой есть множество N всех натуральных чисел; множество значений этой функции, т. е. совокупность чисел x_n, $n \in N$, называют *множеством значений последовательности.*

Множество значений последовательности может быть как конечным, так и бесконечным, в то время как множество ее элементов всегда является бесконечным: любые два разных элемента последовательности отличаются своими номерами.

Например, множество значений последовательности $\{(-1)^n\}$ состоит из двух чисел 1 и -1, а множества значений последовательностей $\{n^2\}$ и $\{1/n\}$ бесконечны.

Последовательность может быть задана с помощью формулы, позволяющей вычислить каждый член последовательности по его номеру. Например, если $x_n = ((-1)^n + 1)/2$, то каждый нечетный член последовательности равен 0, а каждый четный член равен 1.

Иногда последовательность задается *рекуррентной формулой*, позволяющей находить члены последовательности по известным предыдущим. При таком способе задания последовательности обычно указывают:

а) первый член последовательности x_1 (или несколько членов, например, x_1, x_2);

б) формулу, связывающую n-й член с соседними (например, с $(n-1)$-м и $(n+1)$-м членами).

Так, арифметическая прогрессия с разностью d и геометрическая прогрессия со знаменателем $q \neq 0$ задаются соответственно рекуррентными формулами

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad b_{n+1} = b_n q.$$

Зная первые члены этих прогрессий a_1 и b_1, можно получить формулы для $(n+1)$-х членов прогрессий:

$$a_{n+1} = a_1 + nd, \quad b_{n+1} = b_1 q^n, \quad n \in N.$$

Рекуррентной формулой

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n \in N, \quad n \geqslant 3,$$

и условиями $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ задается *последовательность Фибоначчи*.

В некоторых случаях последовательность может быть задана описанием ее членов. Например, если x_n — простое число с номером n, то $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = 7$, $x_5 = 11$ и т. д.

Отметим, наконец, что последовательность $\{x_n\}$ можно изобразить:

а) точками с координатами $(n; x_n)$, $n \in N$, на плоскости;

б) точками x_n, $n \in N$, на числовой оси.

2. Определение предела последовательности.

Определение. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N_ε, что для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Если a — предел последовательности, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

С помощью логических символов это определение можно записать в виде

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = a\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon\colon \ \forall n \geqslant N_\varepsilon \to |x_n - a| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Последовательность, у которой существует предел, называют *сходящейся*.

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ является сходящейся, если

$$\exists a \in R\colon \ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon\colon \ \forall n \geqslant N_\varepsilon \to |x_n - a| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Последовательность, не являющуюся сходящейся, называют *расходящейся*; иначе говоря, последовательность называют расходящейся, если никакое число не является ее пределом.

Заметим, что если $x_n = a$ для всех $n \in N$ (такую последовательность называют *стационарной*), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Из определения (1) следует, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a, тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_n - a\}$ имеет предел, равный нулю, т. е.

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = a\} \Leftrightarrow \{\lim_{n\to\infty} (x_n - a) = 0\}.$$

П р и м е р 1. Записать с помощью логических символов отрицания следующих утверждений:

а) $A = \{$число a — предел последовательности $\{x_n\}\}$;

б) $B = \{\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность$\}$.

△ а) Используя указанное в п. 1 § 1 правило построения отрицания утверждения, содержащего символы $\forall$, $\exists$, из (1) получаем

$$\rceil A = \{\exists \varepsilon_0 > 0\colon\ \forall k \in N \quad \exists n \geqslant k\colon\ |x_n - a| \geqslant \varepsilon_0\},$$

где n зависит, вообще говоря, от k, т. е. $n = n(k)$.

б) Из (2) следует, что

$$\rceil B = \{\forall a \in R \quad \exists \varepsilon_0 > 0\colon\ \forall k \in N \quad \exists n \geqslant k\colon\ |x_n - a| \geqslant \varepsilon_0\}. \ \blacktriangle$$

П р и м е р 2. Пользуясь определением, найти предел последовательности $\{x_n\}$, если:

а) $x_n = \dfrac{n-1}{n}$; б) $x_n = \dfrac{a}{n^r}$, $a \in R$, $r = \dfrac{1}{m}$, $m \in N$;

в) $x_n = q^n$, $|q| < 1$; г) $x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$;

д) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$, $|q| < 1$; е) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

△ а) Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Так как $x_n = 1 - 1/n$, то $|x_n - 1| = 1/n$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ будет выполняться, если $1/n < \varepsilon$, т. е. при $n > 1/\varepsilon$. Выберем в качестве N_ε какое-нибудь натуральное число, удовлетворяющее условию $N_\varepsilon > 1/\varepsilon$, например, число $N_\varepsilon = [1/\varepsilon] + 1$, где $[x] = E(x)$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Тогда для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ будет выполняться неравенство $|x_n - 1| = 1/n \leqslant 1/N_\varepsilon < \varepsilon$. По определению предела это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$.

б) Так как $|x_n| \leqslant |a|/n^r$, а неравенство $|a|/n^r < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, равносильно каждому из неравенств $n^r > |a|/\varepsilon$, $n > (|a|/\varepsilon)^m$, то при всех $n \geqslant N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = [(|a|/\varepsilon)^m] + 1$, справедливо неравенство $|x_n| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a/n^r = 0$.

в) Если $q = 0$, то $x_n = 0$ для всех $n \in N$, и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Пусть $q \neq 0$. Обозначим $r = 1/|q|$, тогда $r > 1$, так как $|q| < 1$. Поэтому $r = 1 + \alpha$, где $\alpha > 0$, откуда

$$\frac{1}{|q|^n} = r^n = (1+\alpha)^n > \alpha n$$

в силу неравенства Бернулли (§ 3, п. 5, (33)). Следовательно,

$$|x_n| = |q|^n < \frac{1}{\alpha n}, \tag{3}$$

и для всех $n \geqslant N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = [1/(\alpha\varepsilon)] + 1$, выполняются неравенства $|x_n| < \dfrac{1}{\alpha n} \leqslant \dfrac{1}{\alpha N_\varepsilon} < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \quad \text{если} \quad |q| < 1.$$

г) Умножив и разделив x_n на $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$, получим

$$x_n = \frac{(\sqrt{n+2})^2 - (\sqrt{n+1})^2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}},$$

откуда $|x_n| < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Неравенство $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$ будет выполняться, если $\sqrt{n} > \dfrac{1}{2\varepsilon}$, т. е. при $n > \dfrac{1}{4\varepsilon^2}$. Пусть $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{4\varepsilon^2}\right] + 1$, тогда для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняются неравенства $|x_n| < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{N_\varepsilon}} < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = 0$.

д) Используя формулу для суммы геометрической прогрессии (§ 3, п. 5, б), (36)), получаем $x_n = \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{1}{1-q} - \dfrac{q^n}{1-q}$, откуда в силу (3) следует, что неравенства $\left|x_n - \dfrac{1}{1-q}\right| = \dfrac{|q|^n}{1-q} < \dfrac{1}{(1-q)\alpha n} < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, выполняются для всех $n \geqslant N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\alpha(1-q)\varepsilon}\right] + 1$, $\alpha = \dfrac{1}{|q|} - 1$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{1-q}$.

е) Так как $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, то $x_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, откуда находим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. ▲

Пример 3. Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{y\to\infty} y_n = a$. Доказать, что последовательность

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2\ \ldots,\ x_k,\ y_k\ \ldots \tag{4}$$

сходится и ее предел также равен a.

△ По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ существуют $N_1 = N_1(\varepsilon)$ и $N_2 = N_2(\varepsilon)$ такие, что для всех $n \geqslant N_1$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, а для всех $n \geqslant N_2$ выполняется неравенство $|y_n - a| < \varepsilon$.

Обозначим n-й член последовательности (4) через z_n. Тогда если $N_\varepsilon = \max(N_1, N_2)$, то для всех $n \geqslant 2N_\varepsilon$ будет выполняться неравенство $|z_n - a| < \varepsilon$. В самом деле, если $n = 2k$ и $n \geqslant 2N_\varepsilon$, то $z_n = y_k$, где $k \geqslant N_\varepsilon \geqslant N_2$, и поэтому $|z_n - a| = |y_k - a| < \varepsilon$. Аналогично, если $n = 2k - 1$ и $n \geqslant 2N_\varepsilon$, то $z_n = x_k$, где $k > N_\varepsilon \geqslant N_1$, и поэтому $|z_n - a| = |x_k - a| < \varepsilon$. ▲

Пример 4. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = a.$$

$\triangle$ Обозначим $y_k = x_k - a$, $S_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, тогда

$$S_n - a = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти номер $N = N_\varepsilon$ такой, что для всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|y_n| < \varepsilon/2$. Обозначим $C = |y_1 + y_2 + \ldots + y_N|$. Тогда, если $n > N$, то

$$|S_n - a| \leqslant \frac{|y_1 + y_2 + \ldots + y_N|}{n} + \frac{|y_{N+1}| + \ldots + |y_n|}{n} < \\ < \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{n-N}{n} \leqslant \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем номер $\widetilde{N} = \widetilde{N}_\varepsilon$ такой, что $C/\widetilde{N} < \varepsilon/2$. Тогда для всех $n \geqslant \widetilde{N}$ будет справедливо неравенство $C/n < \varepsilon/2$.

Пусть, наконец, $n_\varepsilon = \max(N_\varepsilon, \widetilde{N}_\varepsilon)$; тогда для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|S_n - a| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a$. $\blacktriangle$

Обратимся еще раз к определению предела. Согласно определению число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, если при всех $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, которое можно записать в виде

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Другими словами, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_ε, начиная с которого все члены последовательности $\{x_n\}$ принадлежат интервалу $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Этот интервал называют *ε-окрестностью точки* a (рис. 4.1) и обозначают $U_\varepsilon(a)$, а также $O_\varepsilon(a)$, т. е.

$$U_\varepsilon(a) = \{x\colon\ a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{x\colon\ |x - a| < \varepsilon\}.$$

Итак, число a — предел последовательности $\{x_n\}$, если для каждой ε-окрестности точки a найдется номер, начиная с которого все члены последовательности принадлежат этой окрестности, так что вне этой окрестности либо нет ни одного члена последовательности, либо содержится лишь конечное число членов.

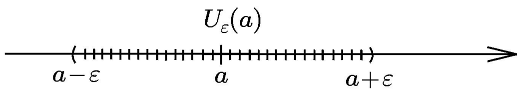

Рис. 4.1

С помощью логических символов определение предела последовательности "на языке окрестностей" можно записать так:

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = a\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon\colon\ \forall n \geqslant N_\varepsilon \to x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Пример 5. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = (-1)^n$, является расходящейся.

△ На числовой оси члены последовательности $\{x_n\}$ изображаются точками -1 и 1, причем $x_{2k}=1$, $x_{2k-1}=-1$, $k\in N$. Любое число a, где $a\neq\pm 1$, не может быть пределом последовательности, так как существует ε-окрестность точки a (достаточно взять $\varepsilon=\min(|a+1|, [a-1|))$, не содержащая ни одного члена последовательности. Число 1 также не является пределом последовательности, так как существует такая ε-окрестность точки a ($\varepsilon=1/2$), что вне ее содержится бесконечно много членов последовательности (все члены с нечетными номерами). Аналогичное утверждение справедливо и для точки -1. Таким образом, ни одно число не является пределом последовательности, т. е. $\{x_n\}$ — расходящаяся последовательность. ▲

Упражнение 1. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|,\quad \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0.$$

3. Единственность предела последовательности.

Теорема 1. *Числовая последовательность может иметь только один предел.*

○ Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два различных предела a и b, причем $a<b$ (рис. 4.2). Выберем $\varepsilon>0$ таким, чтобы

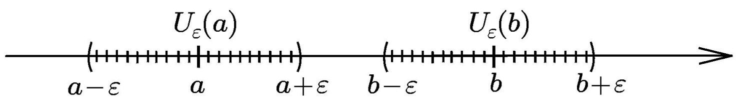

Рис. 4.2

ε-окрестности точек a и b не пересекались (не имели общих точек). Возьмем, например, $\varepsilon=(b-a)/3$. Так как число a — предел последовательности $\{x_n\}$, то по заданному $\varepsilon>0$ можно найти номер N такой, что $x_n\in U_\varepsilon(a)$ для всех $n\geqslant N$. Поэтому вне интервала $U_\varepsilon(a)$ может оказаться лишь конечное число членов последовательности. В частности, интервал $U_\varepsilon(b)$ может содержать лишь конечное число членов последовательности. Это противоречит тому, что b — предел последовательности (любая окрестность точки b должна содержать бесконечное число членов последовательности). Полученное противоречие показывает, что последовательность не может иметь два различных предела. Итак, сходящаяся последовательность имеет только один предел. ●

4. Ограниченность сходящейся последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если существует такое число C_1, что все члены последовательности удовлетворяют условию $x_n\geqslant C_1$, т. е.

$$\exists C_1:\ \forall n\in N\to x_n\geqslant C_1.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если

$$\exists C_2\colon\ \forall n \in N \to x_n \leqslant C_2.$$

Последовательность, ограниченную как снизу, так и сверху, называют *ограниченной*, т. е. последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если

$$\exists C_1\ \ \exists C_2\colon\ \forall n \in N \to C_1 \leqslant x_n \leqslant C_2. \tag{5}$$

Таким образом, последовательность называют ограниченной, если множество ее значений ограничено.

Замечание 1. Условие (5) равносильно следующему:

$$\exists C > 0\colon\ \forall n \in N \to |x_n| \leqslant C. \tag{6}$$

В самом деле, из условия (6) следует (5), если взять $C_1 = -C$, $C_2 = C$, а из условия (5) следует (6), если взять $C = \max(|C_1|, |C_2|)$.

Геометрически ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности содержатся в C-окрестности точки нуль.

Теорема 2. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

○ Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a. По определению предела для $\varepsilon = 1$ найдем номер N такой, что при всех $n \geqslant N$ имеет место неравенство $|x_n - a| < 1$. Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, то

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leqslant |x_n - a| + |a|.$$

Поэтому при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n| < 1 + |a|.$$

Положим $c = \max(1 + |a|, |x_1|, ..., |x_{N-1}|)$, тогда $|x_n| \leqslant C$ при всех $n \in N$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена. ●

Замечание 2. В силу теоремы 2 всякая сходящаяся последовательность является ограниченной. Обратное неверно: не всякая ограниченная последовательность является сходящейся. Например, последовательность $\{(-1)^n\}$ ограничена, но не является сходящейся (пример 5).

Замечание 3. Если условие (6) не выполняется, т. е.

$$\forall C > 0 \quad \exists n_C \in N\colon\ |x_{n_C}| > C,$$

то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ не ограничена.

Пример 6. Доказать, что последовательность $\{1/y_n\}$ является ограниченной, если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $b \neq 0$ и $y_n \neq 0$, для всех $n \in N$.

△ Так как $b \neq 0$, то $|b| > 0$. По заданному числу $\varepsilon = |b|/2$ в силу определения предела последовательности найдется номер N_0 такой, что

$$\forall n \geqslant N_0 \to |y_n - b| < \frac{|b|}{2}. \tag{7}$$

Используя неравенство для модуля разности

$$|b| - |y_n| \leqslant |y_n - b|$$

и неравенство (7), получаем $|b| - |y_n| < |b|/2$, откуда $|y_n| > |b|/2$, и поэтому для всех $n \geqslant N_0$ справедливо неравенство $|1/y_n| < 2/|b|$.

Пусть $C = \max\left(\dfrac{1}{|y_1|}, ..., \dfrac{1}{|y_{N_0-1}|}, \dfrac{2}{|b|}\right)$, тогда для всех $n \in N$ выполняется неравенство $|1/y_n| \leqslant C$, т. е. $\{1/y_n\}$ — ограниченная последовательность. ▲

Упражнение 2. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена, если:

а) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$; б) $x_n = \dfrac{n^2}{a^n}$, $a > 1$.

Упражнение 3. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ не ограничена, если:

а) $x_n = n^{(-1)^n}$; б) $x_n = \dfrac{n\sqrt{n}}{3n+4}$.

5. Свойства сходящихся последовательностей, связанные с неравенствами.

Теорема 3. *Если последовательности* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ *таковы, что*

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n \quad \text{для всех} \quad n \geqslant N_0, \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

то последовательность $\{y_n\}$ *сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

○ По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ найдутся номера $N_1 = N_1(\varepsilon)$ и $N_2 = N_2(\varepsilon)$ такие, что $x_n \in U_\varepsilon(a)$ при всех $n \geqslant N_1$ и $z_n \in U_\varepsilon(a)$ при всех $n \geqslant N_2$. Отсюда и из условия (8) следует (рис. 4.3), что при

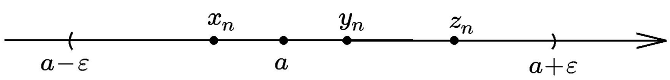

Рис. 4.3

всех $n \geqslant N$, где $N = \max(N_0, N_1, N_2)$, выполняется условие $y_n \in U_\varepsilon(a)$. Это означает, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ●

Замечание 4. Теорему 3 называют теоремой о трех последовательностях или теоремой о пределе “зажатой” последовательности.

Пример 7. Пусть $\alpha_n \geqslant -1$ при всех $n \in N$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{1+\alpha_n} = 1, \quad k \in N. \tag{9}$$

△ Докажем сначала, что

$$1-|\alpha_n| \leqslant \sqrt[k]{1+\alpha_n} \leqslant 1+|\alpha_n|, \quad n \in N, \quad k \in N. \tag{10}$$

В самом деле, если $\alpha_n \geqslant 0$, то

$$1 \leqslant \sqrt[k]{1+\alpha_n} \leqslant (\sqrt[k]{1+\alpha_n})^k = 1+\alpha_n = 1+|\alpha_n|,$$

а если $-1 \leqslant \alpha_n < 0$, то

$$1 \geqslant \sqrt[k]{1+\alpha_n} \geqslant (\sqrt[k]{1+\alpha_n})^k = 1+\alpha_n = 1-|\alpha_n|,$$

откуда следуют неравенства (10). Применяя теорему 3, получаем утверждение (9). ▲

Пример 8. Доказать, что если $a > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \tag{11}$$

△ Если $a > 1$, то $\sqrt[n]{a} > 1$. Обозначая $\sqrt[n]{a} - 1 = \alpha_n$, получаем $\sqrt[n]{a} = 1+\alpha_n$, где $\alpha_n > 0$, откуда

$$a = (1+\alpha_n)^n > \alpha_n n \tag{12}$$

в силу неравенства Бернулли. Так как $\alpha_n > 0$, то из (12) следует, что $0 < \alpha_n < a/n$, т. е. $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < a/n$. Применяя теорему 3 и результат примера 2, б), получаем соотношение (11). ▲

Пример 9. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \tag{13}$$

△ Заметим, что $\sqrt[n]{n} - 1 = \alpha_n > 0$ при $n > 1$, откуда $n = (1+\alpha_n)^n > C_n^2\alpha_n^2$ (§ 3, п. 5, (53)), где $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2} > \dfrac{n^2}{4}$ при $n > 2$. Следовательно, $n > \dfrac{n^2}{4}\alpha_n^2$, или $\alpha_n^2 < \dfrac{4}{n}$, и так как $\alpha_n > 0$, то $0 < \alpha_n < \dfrac{2}{\sqrt{n}}$, т. е.

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Используя теорему 3 и результат примера 2, б), получаем утверждение (13). ▲

Пример 10. Пусть $a > 1$, $p \in N$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0. \tag{14}$$

△ Если $a > 1$, то $a = 1+\alpha$, где $\alpha > 0$, откуда $a^n = (1+\alpha)^n > C_n^{p+1}\alpha^{p+1}$ при $n > p$ (§ 3, п. 5, (53)).

Пусть $n > 2p$, тогда $C_n^{p+1} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-p)}{(p+1)!} > \dfrac{n}{(p+1)!}\left(\dfrac{n}{2}\right)^p$, так как $n-k > \dfrac{n}{2}$ при $1 \leqslant k \leqslant p$. Отсюда следует, что $0 < \dfrac{n^p}{a^n} < \dfrac{2^p(p+1)!}{n}$, и поэтому справедливо утверждение (14). ▲

Т е о р е м а 4. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b, \tag{15}$$

причем

$$a < b, \tag{16}$$

то

$$\exists N_0\colon\ \forall n \geqslant N_0 \to x_n < y_n. \tag{17}$$

○ Как и в теореме 1, выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы ε-окрестности точек a и b (рис. 4.2) не пересекались (возьмем, например, $\varepsilon = (b-a)/3 > 0$). Согласно определению предела по заданному ε можно найти номера N_1 и N_2 такие, что $x_n \in U_\varepsilon(a)$ при всех $n \geqslant N_1$ и $y_n \in U_\varepsilon(b)$ при всех $n \geqslant N_2$. Пусть $N_0 = \max(N_1, N_2)$. Тогда при всех $n \geqslant N_0$ выполняются неравенства

$$x_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < y_n,$$

откуда следует утверждение (17). ●

С л е д с т в и е 1. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $a < b$, *то*

$$\exists N_0\colon\ \forall n \geqslant N_0 \to x_n < b. \tag{18}$$

○ Для доказательства утверждения (18) достаточно в теореме 2 взять $y_n = b, \ n \in N$. ●

С л е д с т в и е 2. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ *и*

$$\forall n \in N \to x_n \geqslant y_n, \tag{19}$$

то

$$a \geqslant b. \tag{20}$$

○ Предположим, что неравенство (20) не выполняется. Тогда $a < b$ и по теореме 4 справедливо утверждение (17), которое противоречит условию (19). Поэтому должно выполняться неравенство (20). ●

З а м е ч а н и е 5. В частности, если для сходящейся последовательности $\{x_n\}$ выполняется для всех $n \in N$ (или для всех $n \geqslant N_0$) неравенство $x_n \geqslant \alpha$ ($x_n \leqslant \beta$), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant \alpha$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \beta$). Отсюда следует, что если все члены сходящейся последовательности $\{x_n\}$ принадлежат отрезку $[a,b]$, т. е. $a \leqslant x_n \leqslant b$ для всех $n \in N$, то и предел этой последовательности принадлежит отрезку $[a,b]$, т. е. $a \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant b$.

З а м е ч а н и е 6. В следствии 2 утверждается, что если соответствующие члены двух сходящихся последовательностей связаны знаком нестрогого неравенства, то такое же неравенство справедливо и для пределов этих последовательностей. Короче: предельный переход сохраняет знак нестрогого неравенства. Однако знак строгого неравенства, вообще говоря, не сохраняется, т. е. если $x_n > y_n$ при $n \geqslant N_0$ и последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ сходятся, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Например, если $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, $y_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, то $x_n > y_n$, $n \in N$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.