Лекция №6

§ 5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Арифметические операции над сходящимися последовательностями

1. Бесконечно малые последовательности. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N_\varepsilon$ такой, что $|\alpha_n - 0| = |\alpha_n| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N_\varepsilon$.

Понятие бесконечно малой последовательности используется для доказательства свойств сходящихся последовательностей. Пусть число a — предел последовательности $\{x_n\}$. Обозначим $\alpha_n = x_n - a$. По определению предела

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N\varepsilon\colon \ \forall n \geqslant N_\varepsilon \to |x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon,$$

т. е. $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Обратно: если $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Приведем примеры бесконечно малых последовательностей, используя результаты примеров 2, 8–10:

а) $\{a/n^r\}$, $a \in R$, $r = \dfrac{1}{m}$, $m \in N$; б) $\{q^n\}$, $|q| < 1$;

в) $\{\sqrt[n]{a} - 1\}$, $a > 1$; г) $\{\sqrt[n]{n} - 1\}$; д) $\{n^p/a^n\}$, $p \in N$, $a > 1$.

При изучении свойств сходящихся последовательностей нам потребуется ввести арифметические операции над последовательностями. Назовем суммой, разностью, произведением и частным двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ соответственно последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n/y_n\}$. При определении частного предполагается, что $y_n \neq 0$ для всех $n \in N$.

Бесконечно малые последовательности обладают следующими свойствами:

а) алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

б) произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой последовательностью.

○ а) Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют номера $N_1 = N_1(\varepsilon)$ и $N_2 = N_2(\varepsilon)$ такие, что $|\alpha_n| < \varepsilon/2$ при всех $n \geqslant N_1$ и $|\beta_n| < \varepsilon/2$ при всех $n \geqslant N_2$. Если $N = N_\varepsilon = \max(N_1, N_2)$, то, используя неравенства для модуля суммы (разности), получаем для всех $n \geqslant N$ неравенство

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

Доказанное свойство с помощью индукции распространяется на любое число слагаемых.

б) Пусть $\{\alpha_n\}$ — ограниченная последовательность, $\{\beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность. По определению ограниченной последовательности

$$\exists\, C > 0\colon\ \forall n \in N \to |\alpha_n| < C,$$

а по определению бесконечно малой последовательности

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon\colon\ \forall n \geqslant N_\varepsilon \to |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Отсюда следует, что

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon \to |\alpha_n \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{C}\, C = \varepsilon,$$

т. е. $\{\alpha_n \beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность. ●

В частности, если $\{\alpha_n\}$ — стационарная последовательность, т. е. $\alpha_n = a$ для всех $n \in N$, а $\{\beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то $\{\alpha_n \beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

З а м е ч а н и е. Так как бесконечно малая последовательность ограничена (§ 4, теорема 2), то из доказанного свойства следует, что произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

2. Бесконечно большие последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого $\delta > 0$ существует такой номер N_δ, что для всех $n \geqslant N_\delta$ выполняется неравенство $|x_n| > \delta$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} = \infty$ и говорят, что последовательность *имеет бесконечный предел.*

Используя логические символы, это определение можно записать так:

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\} \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \exists N_\delta\colon\ \forall n \geqslant N_\delta \to |x_n| > \delta. \tag{1}$$

Дадим геометрическую интерпретацию определения (1). Назовем δ-окрестностью ∞ (рис. 5.1) множество $E = \{x \in R\colon\ |x| > \delta\}$. Если

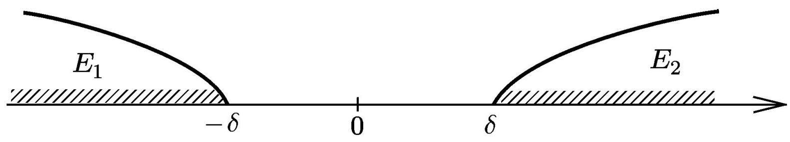

Рис. 5.1

последовательность $\{x_n\}$ имеет бесконечный предел, то в любой δ-окрестности ∞ лежат все члены последовательности, за исключением, быть может, конечного числа членов.

Аналогично вводятся для последовательности $\{x_n\}$ понятия бесконечного предела, равного $-\infty$ и $+\infty$. Эти пределы обозначаются соответственно символами $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и определяются так:

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\} \Leftrightarrow \forall\delta > 0\ \exists N_\delta:\ \forall n \geqslant N_\delta \to x_n < -\delta, \tag{2}$$

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty\} \Leftrightarrow \forall\delta > 0\ \exists N_\delta:\ \forall n \geqslant N_\delta \to x_n > \delta. \tag{3}$$

Множества $E_1 = \{x \in R\colon\ x < -\delta\}$ и $E_2 = \{x \in R\colon\ x > \delta\}$, где $\delta > 0$, назовем δ-окрестностями $-\infty$ и $+\infty$ соответственно (см. рис. 5.1). Тогда $E = E_1 \cup E_2$.

Согласно определению (3) последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный $+\infty$, если в δ-окрестности символа $+\infty$ содержатся все члены этой последовательности, за исключением, быть может, конечного числа их. Аналогичный смысл имеет определение (2).

В дальнейшем под пределом последовательности будем понимать конечный предел, если не оговорено противное.

Приведем примеры последовательностей, имеющих бесконечный предел.

Если $x_n = -\sqrt{n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; если $x_n = n^2/(n+2)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; если $x_n = (-1)^n 2^n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Упражнение 1. Доказать, что если $x_n \neq 0$ для всех $n \in N$, то последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой тогда и только тогда, когда $\{1/x_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

Упражнение 2. Можно ли утверждать, что:

а) всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной;

б) всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой?

Упражнение 3. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная, а $\{y_n\}$ — бесконечно большая последовательность. Доказать, что $\{x_n + y_n\}$ — бесконечно большая последовательность.

Упражнение 4. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$.

3. Арифметические операции над сходящимися последовательностями.

Теорема. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *то*:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ *при условии, что* $y_n \neq 0$ $(n \in N)$ *и* $b \neq 0$.

○ Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности.

а) Из равенства $x_n + y_n = a + b + \alpha_n + \beta_n$, где $\{\alpha_n + \beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность, следует, что $x_n + y_n \to a + b$ при $n \to \infty$.

б) Воспользуемся равенством

$$x_n y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n.$$

Так как $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности, то последовательности $\{a\beta_n\}$, $\{b\alpha_n\}$ и $\{\alpha_n\beta_n\}$ также являются бесконечно малыми, откуда следует, что $\{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Поэтому $x_n y_n \to ab$ при $n \to \infty$.

в) Докажем, что $\left\{\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right\}$ — бесконечно малая последовательность. Имеем $\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{(a+\alpha_n)b - (b+\beta_n)a}{by_n} = \left(\alpha_n - \dfrac{a}{b}\beta_n\right)\dfrac{1}{y_n}$. Так как $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности, то и последовательность $\left\{\alpha_n - \dfrac{a}{b}\beta_n\right\}$ также является бесконечно малой.

По условию $y \to b$ при $n \to \infty$, где $b \neq 0$ и $y_n \neq 0$ для всех $n \in N$. Поэтому (см. пример 6, § 4) последовательность $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ является ограниченной.

Отсюда следует, что $\left\{\left(\alpha_n - \dfrac{a}{b}\beta_n\right)\dfrac{1}{y_n}\right\}$ — бесконечно малая последовательность как произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность.

Таким образом, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right\}$ — бесконечно малая последовательность, и поэтому $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$ при $n \to \infty$. ●

Пример 1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, если $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k a_{k+1}}$, где $\{a_k\}$ — арифметическая прогрессия, все члены и разность d которой отличны от нуля.

△ Используя равенство

$$S_n = \frac{1}{da_1} - \frac{1}{d(a_1 + nd)},$$

полученное в § 3 (пример 2, а)), находим $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{da_1}$. ▲

Пример 2. Пусть $P_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + ... + a_{k-1}x + a_k$, $Q_k(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + ... + b_{k-1}x + b_k$, где $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_k(n)}{Q_k(n)}$.

△ Разделив числитель и знаменатель дроби на n^k, получаем

$$\frac{P_k(n)}{Q_k(n)} = \frac{a_0 + a_1\dfrac{1}{n} + ... + a_k\dfrac{1}{n^k}}{b_0 + b_1\dfrac{1}{n} + ... + b_k\dfrac{1}{n^k}}.$$

Отсюда следует, что искомый предел равен a_0/b_0, так как $a/n^p \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $a \in R$ и любого $p \in N$ (§ 4, пример 2, б)). ▲

Пример 3. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где $x_n = \dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

△ Воспользуемся формулой $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, полученной в § 3 (пример 2, в)). Тогда $x_n = \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$, откуда находим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{3}$. ▲

Пример 4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x_n = \sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2-2n+5}$.

△ Так как

$$x_n = \frac{(n^2+2n+3)-(n^2-2n+5)}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2-2n+5}} = \frac{4-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}},$$

то, используя результат примера 7, § 4, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. ▲

Пример 5. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, сходится, и найти ее предел.

△ В сумме x_n каждое слагаемое меньше предыдущего, и поэтому

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < x_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} < x_n < \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

Используя теорему 3, § 4 и результат примера 7, § 4, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. ▲

Упражнение 5. Доказать, что если существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где $a \neq 0$, а последовательность $\{y_n\}$ расходится, то последовательность $\{x_n y_n\}$ также расходится.

Упражнение 6. Доказать, что если одна из последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ сходится, а другая расходится, то последовательность $\{x_n + y_n\}$ расходится.

Упражнение 7. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

а) $x_n = \dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)$; б) $x_n = \dfrac{1}{n^4}\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$; в) $x_n = \sqrt{(n+a)(n+b)} - n$.

Упражнение 8. Последовательность $\{x_n\}$ задана при $n \geqslant 3$ рекуррентной формулой $x_n = (\alpha+1)x_{n-1} + \alpha x_{n-2}$, где $|\alpha| < 1$, и условиями $x_1 = a$, $x_2 = b$. Доказать, что она сходится, и найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Упражнение 9. Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия, все члены которой положительны и разность $d \neq 0$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}.$$

§ 6. Предел монотонной последовательности

1. Монотонная последовательность. Точные грани последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называют *возрастающей* (*неубывающей*), если для любого $n \in N$ выполняется неравенство

$$x_{n+1} \geqslant x_n. \tag{1}$$

Аналогично последовательность $\{x_n\}$ называют *убывающей* (*невозрастающей*), если для любого $n \in N$ справедливо неравенство

$$x_{n+1} \leqslant x_n. \tag{2}$$

Если неравенство (1) можно записать в виде $x_{n+1} > x_n$, а неравенство (2) — в виде $x_{n+1} < x_n$, то последовательность $\{x_n\}$ называют соответственно *строго возрастающей* и *строго убывающей.*

Возрастающую или убывающую последовательность называют *монотонной*, а строго возрастающую или строго убывающую — *строго монотонной.*

Если неравенство (1) выполняется при $n \geqslant n_0$, то последовательность $\{x_n\}$ называют *возрастающей, начиная с номера* n_0 (*при* $n \geqslant n_0$). Аналогично вводятся понятия убывающей, строго убывающей и строго возрастающей последовательности, начиная с номера n_0 (при $n \geqslant n_0$).

Для доказательства теоремы о пределе монотонной последовательности нам потребуются понятия точной верхней и нижней грани последовательности.

Точную верхнюю (нижнюю) грань множества значений последовательности $\{x_n\}$ называют *точной верхней* (*нижней*) *гранью последовательности* и обозначают соответственно $\sup\{x_n\}$ и $\inf\{x_n\}$.

Определение точной верхней грани $\sup X$ числового множества X, введенное в § 2, можно записать так:

$$\{M = \sup X\} \Leftrightarrow \{\forall x \in X \to x \leqslant M\} \wedge \{\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x_\varepsilon \in X\colon \ x_\varepsilon > M - \varepsilon\}. \tag{3}$$

Аналогично определение точной нижней грани $\inf X$ числового множества X можно записать в виде

$$\{m = \inf X\} \Leftrightarrow \{\forall x \in X \to x \geqslant m\} \wedge \{\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x_\varepsilon \in X\colon \ x_\varepsilon < m + \varepsilon\}. \tag{4}$$

Поэтому определения точной верхней и точной нижней граней последовательности можно записать в виде

$$[a = \sup\{x_n\}] \Leftrightarrow \{\forall n \in N \to x_n \leqslant a\} \wedge \{\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon\colon \ x_{N_\varepsilon} > a - \varepsilon\}, \tag{5}$$

$$[b = \inf\{x_n\}] \Leftrightarrow \{\forall n \in N \to x_n \geqslant b\} \wedge \{\forall \varepsilon < 0 \ \ \exists N_\varepsilon\colon \ x_{N_\varepsilon} < b + \varepsilon\}. \tag{6}$$

Таким образом, число a — точная верхняя грань последовательности $\{x_n\}$, если выполняются условия:

1) все члены последовательности не превосходят a, т. е.

$$\forall n \in N \to x_n \leqslant a; \tag{7}$$

2) для каждого $\varepsilon > 0$ (рис. 6.1) найдется член последовательности, больший $a - \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \ x_{N_\varepsilon} > a - \varepsilon. \tag{8}$$

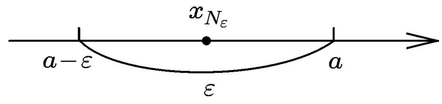

Рис. 6.1

Аналогично разъясняется определение (6) точной нижней грани последовательности.

Упражнение 1. Доказать, что если $M = \sup X$, то существует последовательность $\{x_n\}$, где $x_n \in X$ при всех $n \in N$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$.

2. Признак сходимости монотонной последовательности.

Теорема 1. *Если последовательность $\{x_n\}$ является возрастающей и ограниченной сверху, то существует*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}.$$

Если последовательность $\{x_n\}$ является убывающей и ограниченной снизу, то существует

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}.$$

○ Ограничимся доказательством теоремы для случая ограниченной сверху и возрастающей последовательности. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, т. е. множество чисел $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ ограничено сверху, то по теореме о существовании верхней грани (§ 2) существует точная верхняя грань этой последовательности, определяемая условиями (7), (8). Так как $\{x_n\}$ — возрастающая последовательность, то

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon \to x_{N_\varepsilon} \leqslant x_n. \tag{9}$$

Из (7)–(9) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \ \forall n \geqslant N_\varepsilon \to a - \varepsilon < x_{N_\varepsilon} \leqslant x_n \leqslant a, \quad \text{т. е. } x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Это означает, согласно определению предела, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \sup\{x_n\}. \quad \bullet$$

Замечание 1. Теорема 1 остается справедливой для последовательности, ограниченной сверху (снизу) и возрастающей (убывающей), начиная с некоторого номера.

Упражнение 2. Доказать, что монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена.

Пример 1. Доказать, что если $x_n = \frac{a^n}{n!}$, где $a > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

$\triangle$ Так как

$$x_{n+1} = \frac{a}{n+1}\, x_n, \tag{10}$$

то $x_{n+1} \leqslant x_n$ при всех $n \geqslant n_0$, где $n_0 = [a]$, т. е. $\{x_n\}$ — убывающая при $n \geqslant n_0$ последовательность. Кроме того, $x_n \geqslant 0$ при всех $n \in N$, т. е. последовательность ограничена снизу. По теореме 1 последовательность $\{x_n\}$ сходится. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Тогда, переходя к пределу в равенстве (10), получаем $b = 0 \cdot b$, т. е. $b = 0$. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \quad \blacktriangle \tag{11}$$

Замечание 2. Утверждение (11) справедливо не только при $a > 0$, но и при любом $a \in R$, так как $\left|\frac{a^n}{n!}\right| \leqslant \frac{|a|^n}{n!}$.

Пример 2. Последовательность $\{x_n\}$ задается рекуррентной формулой

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \tag{12}$$

где $x_1 > 0$, $a > 0$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}. \tag{13}$$

$\triangle$ Докажем сначала методом индукции, что

$$\forall k \in N \to x_k > 0. \tag{14}$$

В самом деле, из формулы (12) и условий $x_1 > 0$, $a > 0$ следует, что $x_2 > 0$. Предполагая, что $x_n > 0$, из равенства (12) получаем $x_{n+1} > 0$. Утверждение (14) доказано.

Далее, применяя неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического, из (12) получаем

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geqslant \sqrt{x_n \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a} \quad \text{при} \quad n \in N,$$

т. е.

$$\forall n \geqslant 2 \to x_n \geqslant \sqrt{a}. \tag{15}$$

Итак, последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу. Докажем, что она является убывающей. Запишем равенство (12) в виде

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n},$$

откуда в силу (14) и (15) получаем

$$\forall n \geqslant 2 \to x_{n+1} \leqslant x_n,$$

т. е. последовательность является убывающей при $n \geqslant 2$. По теореме 1 существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, где $\alpha \geqslant \sqrt{a} > 0$ в силу условия (15). Переходя в равенстве (12) к пределу, получаем $\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\alpha + \dfrac{a}{\alpha}\right)$, откуда $\alpha^2 = a$, $\alpha = \sqrt{a}$, т. е. справедливо утверждение (13). ▲

3. Число *e*. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

и покажем, что эта последовательность возрастающая и ограниченная сверху. Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$x_n = 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + C_n^2 \frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^k \frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{1}{n^n},$$

где

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}, \quad k = \overline{1,n}, \quad C_n^0 = 1.$$

Запишем x_n в следующем виде:

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right); \tag{16}$$

тогда

$$x_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right). \tag{17}$$

Все слагаемые в суммах (16) и (17) положительны, причем каждое слагаемое суммы (16) меньше соответствующего слагаемого суммы (17), так как $1 - \dfrac{m}{n} < 1 - \dfrac{m}{n+1}$, $m = \overline{1, n-1}$, а число слагаемых в сумме (17) на одно больше, чем в сумме (16). Поэтому $x_n < x_{n+1}$ для всех $n \in N$, т. е. $\{x_n\}$ — строго возрастающая последовательность. Кроме того, учитывая, что $0 < 1 - \dfrac{m}{n} < 1$ $(m = \overline{1, n-1})$, из равенства (16) получаем $x_n < 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$. Так как $\dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$ при $k \in N$, то, используя формулу для суммы геометрической прогрессии, получаем $x_n < 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^{k-1}} = 1 + \dfrac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} = 3 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Следовательно,

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3,$$

т. е. $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. По теореме 1 существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Этот предел обозначается буквой e. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{18}$$

Число e является иррациональным, оно служит основанием натуральных логарифмов и играет важную роль в математике. Справедливо приближенное равенство

$$e \approx 2{,}718281828459045.$$

Упражнение 3. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

Упражнение 4. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, заданная при $n \in N$ формулой $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ и условием $x_1 = \sqrt{a}$, сходится, и найти ее предел.

Упражнение 5. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, заданная при $x \in N$ рекуррентной формулой $x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$ и условием $x_1 = a$, где $0 < a < 1$, сходится, и найти ее предел.

4. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Назовем последовательность отрезков $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n, ...$, где $\Delta_n = [a_n, b_n]$, *стягивающейся*, если выполнены следующие условия:

а) каждый последующий отрезок принадлежит предыдущему, т. е.

$$\forall n \in N \to \Delta_{n+1} \subset \Delta_n; \tag{19}$$

б) длина n-го отрезка Δ_n стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0. \tag{20}$$

Условие (19) означает, что

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant ... \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant ... \leqslant b_2 \leqslant b_1. \tag{21}$$

Теорема 2 (Кантора). *Если последовательность отрезков является стягивающейся, то существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности.*

○ а) Существование. Из условия (21) следует, что

$$\forall n \in N \quad \forall m \in N \to a_n \leqslant b_m. \tag{22}$$

По теореме об отделимости числовых множеств (§ 2, теорема 2) из (22) заключаем, что существует $\sup\{a_n\} = c$, причем

$$\forall n \in N \to a_n \leqslant c \leqslant b_n,$$

т. е. существует точка c, принадлежащая всем отрезкам стягивающейся системы $\{\Delta_n\}$.

б) Единственность. Пусть существуют две различные точки c и c', принадлежащие всем отрезкам последовательности $\{\Delta_n\}$, т. е. $c \in \Delta_n$ и $c' \in \Delta_n$ при любом $n \in N$. Так как $c \neq c'$, то либо $c < c'$, либо $c' < c$. Пусть, например, $c < c'$. Тогда $a_n \leqslant c < c' \leqslant b_n$ при любом $n \in N$, откуда по свойствам неравенств $b_n - a_n \geqslant c' - c = \alpha > 0$ при любом $n \in N$, что противоречит условию (20). Итак, $\alpha = 0$, т. е. $c' = c$. ●

Упражнение 6. Доказать, что если выполнены условия (20) и (21), то последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ являются сходящимися, причем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c, \quad \text{где} \quad c = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}.$$