Лекция №7

§ 7. Подпоследовательности. Частичные пределы

1. Подпоследовательность. Пусть задана последовательность $\{x_n\}$. Рассмотрим строго возрастающую последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел, т. е. такую, что

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

Тогда последовательность $\{y_k\}$, где $y_k = x_{n_k}$ при $k \in N$, называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$ и обозначается $\{x_{n_k}\}$. Например, последовательность нечетных натуральных чисел 1, 3, 5, 7, 9, ..., взятых в порядке возрастания, является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел 1, 2, 3, ..., а последовательность 3, 5, 1, 9, 11, 7, ... уже не является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел.

Согласно определению подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ образована из членов исходной последовательности $\{x_n\}$, причем порядок следования членов в подпоследовательности такой же, как и в данной последовательности $\{x_n\}$. В записи $\{x_{n_k}\}$ число k означает порядковый номер члена последовательности $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$, а n_k — номер этого члена в исходной последовательности. Поэтому $n_k \geqslant k$, откуда следует, что $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Введем теперь понятие частичного предела. Пусть $\{x_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, и пусть существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Тогда a называют *частичным пределом последовательности* $\{x_n\}$. Например, последовательность $\{(-1)^n\}$ имеет два частичных предела, а именно -1 и 1. Последовательность $\{1 + (-1)^n n\}$ имеет два частичных предела, а именно 0 и $+\infty$.

Если $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, а L — множество всех ее частичных пределов, то числа $\sup L$ и $\inf L$ называют соответственно *верхним* и *нижним пределом* этой последовательности и обозначают соответственно символами $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Например, для последовательности 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... имеем $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 3$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1$.

Упражнение 1. Доказать, что если некоторая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ монотонной последовательности $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Упражнение 2. Доказать, что если последовательность имеет предел, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.

Упражнение 3. Привести пример неограниченной последовательности:

а) не имеющей конечных частичных пределов;

б) имеющей конечное число конечных частичных пределов;

в) имеющей бесконечно много частичных пределов.

Упражнение 4. Привести пример последовательности такой, что:

а) ее частичными пределами являются все члены данной последовательности;

б) каждое вещественное число — ее частичный предел.

2. Существование частичного предела у ограниченной последовательности.

Теорема (Больцано–Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

○ Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, тогда все члены последовательности принадлежат некоторому отрезку, т. е.

$$\exists a, b\colon\ \forall n \in N \to x_n \in \Delta = [a, b]. \tag{1}$$

Разобьем отрезок $\Delta = [a, b]$ пополам точкой d. Тогда по крайней мере один из отрезков $[a, d]$, $[d, b]$ содержит бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Если оба отрезка обладают этим свойством, возьмем, например, правый отрезок (и будем так поступать в дальнейшем). Выбранный отрезок, содержащий бесконечное число членов данной последовательности, обозначим $\Delta_1 = [a_1, b_1]$, его длина равна

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Разделив отрезок Δ_1 пополам, выберем указанным выше способом из двух получившихся отрезков отрезок $\Delta_2 = [a_2, b_2]$, содержащий бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$.

Продолжая эти рассуждения, получим последовательность $\{\Delta_n = [a_n, b_n]\}$ отрезков таких, что:

1) $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \ldots$;

2) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Следовательно, $\{\Delta_n\}$ — стягивающаяся последовательность отрезков. По теореме Кантора существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам, т. е.

$$\exists c\colon\ \forall k \in N \to c \in \Delta_k. \tag{2}$$

Покажем, что найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c. \tag{3}$$

Так как отрезок Δ_1 содержит бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$, то

$$\exists n_1 \in N\colon\ x_{n_1} \in \Delta_1.$$

Отрезок Δ_2 также содержит бесконечное число членов данной последовательности, и поэтому

$$\exists n_2 > n_1\colon\ x_{n_2} \in \Delta_2.$$

Вообще,

$$\forall k \in N \quad \exists n_k\colon\ x_{n_k} \in \Delta_k, \quad \text{где } n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1} < n_k.$$

Следовательно, существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ такая, что

$$\forall k \in N \to a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k. \tag{4}$$

Условия (2) и (4) означают, что точки c и x_{n_k} принадлежат отрезку $\Delta_k = [a_k, b_k]$, и поэтому расстояние между ними не превосходит длины отрезка Δ_k, т. е.

$$|x_{n_k} - c| \leqslant b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}. \tag{5}$$

Так как $\left\{\dfrac{1}{2^k}\right\}$ — бесконечно малая последовательность (§ 4, пример 2, в)), то из (5) следует, что справедливо утверждение (3). ●

З а м е ч а н и е. Теорему Больцано–Вейерштрасса можно сформулировать так: любая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.

У п р а ж н е н и е 5. Показать, что всякая неограниченная последовательность имеет частичный предел, равный ∞.

У п р а ж н е н и е 6. Доказать, что для того, чтобы a, где a — число или один из символов $+\infty$, $-\infty$, было частичным пределом последовательности, необходимо и достаточно, чтобы в любой окрестности a содержалось бесконечное число членов этой последовательности.

§ 8. Критерий Коши сходимости последовательности

1. Фундаментальная последовательность. Последовательность $\{x_n\}$ называют *фундаментальной*, если она удовлетворяет *условию Коши*: для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число n_ε, что для любого $n \geqslant n_\varepsilon$ и любого $m \geqslant n_\varepsilon$ справедливо неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Кратко это условие можно записать так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon\colon\ \forall n \geqslant n_\varepsilon \quad \forall m \geqslant n_\varepsilon \to |x_n - x_m| < \varepsilon, \tag{1}$$

или в другом виде:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\colon\ \forall n \geqslant n_\varepsilon \quad \forall p \in N \to |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Докажем, что фундаментальная последовательность является ограниченной.

○ Пусть $\varepsilon = 1$, тогда согласно условию Коши (1) найдется номер n_0 такой, что для всех $n \geqslant n_0$ и для всех $m \geqslant n_0$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < 1$, и, в частности, $|x_n - x_{n_0}| < 1$.

Так как $|x_n| = |(x_n - x_{n_0}) + x_{n_0}| \leqslant |x_{n_0}| + |x_n - x_{n_0}| < |x_{n_0}| + 1$ для всех $n \geqslant n_0$, то при всех $n \in N$ справедливо неравенство $|x_n| < C$, где $C = \max(|x_1|, ..., |x_{n_0-1}|, |x_{n_0}| + 1)$. Это означает, что $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. ●

Упражнение 1. Доказать, что произведение двух фундаментальных последовательностей есть фундаментальная последовательность.

2. Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности.

Теорема (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

○ Необходимость. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, равный a. По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \ \forall p \geqslant N_\varepsilon \to |x_p - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Полагая в (2) сначала $p = n$, а затем $p = m$ и используя неравенство для модуля суммы (разности), получаем

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $n \geqslant N_\varepsilon$ и для любого $m \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$, т. е. выполняется условие (1) при $n_\varepsilon = N_\varepsilon$.

Достаточность. Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Докажем, что она имеет конечный предел. По определению фундаментальной последовательности

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \ \forall n \geqslant n_\varepsilon \quad \forall m \geqslant n_\varepsilon \to |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Так как фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной, то по теореме Больцано–Вейерштрасса она содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть ее предел равен a, т. е.

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a. \tag{4}$$

Покажем, что число a является пределом исходной последовательности $\{x_n\}$. По определению предела (4)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_\varepsilon : \ \forall k \geqslant k_\varepsilon \to |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Пусть $N_\varepsilon = \max(n_\varepsilon, k_\varepsilon)$. Фиксируем в (5) номер $n_k \geqslant N_\varepsilon$ (такой номер найдется, так как $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$). Тогда при $m = n_k$ и при всех $n \geqslant N_\varepsilon$ в силу (3) выполняется неравенство

$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что при всех $n \geqslant N_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. ●

П р и м е р. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

расходится.

△ Последовательность $\{x_n\}$ расходится, если не выполняется условие Коши (1), т. е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0\colon\ \forall k \in N \quad \exists n \geqslant k\ \exists m \geqslant k\colon\ |x_n - x_m| \geqslant \varepsilon_0. \qquad (7)$$

Пусть задано любое $k \in N$, положим $n = 2k$, $m = k$. Тогда

$$|x_n - x_m| = |x_{2k} - x_k| = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} \geqslant \frac{1}{2k}k = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, условие (7) выполняется при $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$, и в силу критерия Коши последовательность $\{x_n\}$ расходится. ▲

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

а) $x_n = 2,\underbrace{3434\ldots34}_{n}$; б) $x_n = \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$;

в) $x_n = \dfrac{(3n+2)^4 + (n-3)^4}{(2n^2+3)^2 + (n^2+1)^2}$; г) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

2. Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ расходится, то при $b \neq 0$ последовательность $\{ax_n + by_n\}$ расходится.

3. Доказать, что если $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = b$, где $a \neq b$, то последовательность $\{x_k\}$ расходится.

4. Привести пример ограниченных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где $y_n \neq 0$ при всех $n \in N$, таких, что последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ не ограничена.

5. Используя логические символы, сформулировать утверждения:

а) последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху;

б) последовательность не является убывающей.

6. Пусть существует число $C > 0$ такое, что $|y_n| \geqslant C$ для всех $n \in N$, а последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Доказать, что последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ ограничена.

7. Доказать, что сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ достигает хотя бы одной из своих точных граней, верхней $\sup\{x_n\} = \mathscr{M}$ или нижней $\inf\{x_n\} = m$, т. е. существует номер k такой, что $x_k = \mathscr{M}$, или существует номер p такой, что $x_p = m$.

8. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то последовательность $\{x_n\}$ достигает своей точной нижней грани.

9. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и существует число $C > 0$ такое, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $|y_n| \geqslant C$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$.

10. Доказать, что всякая монотонная последовательность имеет только один частичный предел.

11. Доказать, что последовательность x_n является фундаментальной тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N\colon \ \forall n > N \to |x_n - x_N| < \varepsilon.$$

12. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, если сходятся ее подпоследовательности $\{x_{2k}\}$, $\{x_{2k-1}\}$ и $\{x_{3k}\}$.

13. Доказать, что если $\{x_n\}$ — монотонная последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то подпоследовательность $\{y_n\}$, где $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x_k$, сходится.

14. Привести пример расходящейся последовательности $\{x_n\}$ такой, что для любого $p \in N$ выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+p} - x_n) = 0.$$

15. Привести пример сходящейся последовательности $\{x_n\}$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} n(x_{n+1} - x_n) = \infty.$$

16. Доказать, что существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ и для любого $n \in N$ выполняются условия

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leqslant |x_{n+1} - x_n|,$$
$$(x_{n+2} - x_{n+1})(x_{n+1} - x_n) \leqslant 0.$$

17. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, если существует число $C > 0$ такое, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |x_{k+1} - x_k| < C.$$

18. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n},$$

имеет предел a такой, что $1/2 < a < 1$.

19. Последовательность $\{x_n\}$ задана при всех $n \in N$ рекуррентной формулой $x_{n+1} = 1 - x_n^2$ и условием $x_1 = a$, где $0 < a < 1$. Доказать, что эта последовательность сходится, и найти ее предел.

20. Пусть $x_1 = 1$, $x_2 = b$, $x_n = \dfrac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2}$ при $n \geqslant 3$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a+2b}{3}.$$

21. Доказать, что если $x_n > 0$ при $n \in N$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = a.$$

22. Доказать, что если $x_n > 0$ при $n \in N$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n-1}} = a$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = a.$$