**ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ**

**ВВЕДЕНИЕ**

Рассмотрим уравнение

, (1)

где  при  и , гиперболического типа в полуплоскости  с параболическим вырождением вдоль прямой . Пусть  − область, расположенная в полуплоскости  и ограниченная отрезком  оси  и характеристиками  и  уравнения (1). Изучению задачи Коши для уравнения (1) в области  с начальными данными

, (2)

где  и  заданные гладкие функции, посвящено довольно много исследований (Г. Дарбу[[1]](#footnote-1), Ф. Трикоми[[2]](#footnote-2), С. Геллерстедт[[3]](#footnote-3), Ф. И. Франкль[[4]](#footnote-4), И. С. Березин[[5]](#footnote-5), А. В. Бицадзе[[6]](#footnote-6),

К. И. Бабенко[[7]](#footnote-7), М. Проттер[[8]](#footnote-8), Г. Хельвиг[[9]](#footnote-9) и др.).

Впервые задачу Коши для вырождающегося гиперболического уравнения



с начальными данными (2) решил Г. Дарбу. И. С. Березин рассмотрел задачу Коши для уравнения (1), когда  (случай был рассмотрен Ф. И. Франклем и К. И. Бабенко). Он доказал, что при  решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных функций, т. е. задача Коши поставлена корректно. В случае же  И. С. Березин строит пример, когда задача Коши оказывается поставленной некорректно. Результаты И. С. Березина были обобщены Р. Конта[[10]](#footnote-10) для нелинейного уравнения

. (3)

М. Проттер показал, что задача Коши для уравнения (1) поставлена корректно, если коэффициент  удовлетворяет условию

, (4)

Условие (4) не является необходимым для корректности задачи Коши с начальными данными на линии параболического вырождения, что легко показать на примере. Для уравнения

 (5)

условие (4) принимает следующий вид:

. (6)

Если , то, как показал Г. Хельвиг[[11]](#footnote-11), задача Коши корректна при .

С. А. Терсенев[[12]](#footnote-12) и Чи Минь-ю[[13]](#footnote-13) показали, что если коэффициенты  и свободный член  уравнения (5), а также начальные данные и  достаточно гладкие, то задача Коши для уравнения (5) с начальными данными (2) имеет единственное решение при условии, что

. (7)

Для уравнения

 (8)

задача Коши с начальными данными (2) поставлена корректно, если . В случае , когда обычная задача Коши с начальными данными на линии параболического вырождения может оказаться неразрешимой, естественно исследовать эту задачу с видоизменёнными начальными данными[[14]](#footnote-14):

, (9)

где

.

Изучению этой задачи посвящен ряд работ С. А. Терсенева[[15]](#footnote-15), М. М. Смирнова[[16]](#footnote-16) и В. Н. Николенко, И. Х. Хайруллина[[17]](#footnote-17).

С. А. Терсенев[[18]](#footnote-18) исследовал задачу Коши для систем дифференциальных уравнений гиперболического типа, вырождающихся при . Им доказана единственность и существование решения Коши с начальными данными на линии вырождения (а также когда начальные данные на линии вырождения удовлетворяются с некоторым весом).

К. И. Карапетян[[19]](#footnote-19) рассмотрел задачу Коши для уравнения гиперболического типа

 (10)

с начальными данными на плоскости, на которой наименьшее собственное значение  матрицы , положительное при , обращается в нуль. При условии  и при некоторых предположениях гладкости коэффициентов и их поведения при , доказано, что при  задача Коши поставлена корректно. Если же , то задача Коши корректна при некоторых дополнительных условиях на коэффициенты при первых производных. Существование и единственность решения задачи Коши доказываются с помощью энергетических неравенств. Применяя тот же метод Ф. Т. Барановский[[20]](#footnote-20) рассмотрел задачу Коши для уравнения гиперболического типа

 (11)

с начальными данными на плоскости , на которой функция , положительная при, обращается в нуль. При условии  доказано, что задача Коши поставлена корректно.

Смешанную задачу при краевом условии первого рода для уравнения

, (12)

,

вырождающегося при  рассмотрел М. Л. Краснов[[21]](#footnote-21). Он дал достаточные условия существования и единственности решения смешанной задачи при ; если же  то для разрешимости задачи коэффициенты при первых производных должны обращаться в нуль соответствующего порядка при . При доказательстве существования решения им применен аналог метода Галеркина, причем сначала получены существование и единственность обобщенного решения смешанной задачи, а затем исследуются его дифференциальные свойства. М. Л. Краснов рассмотрел также случай вырождения уравнения (12) на части боковой границы цилиндра.

Ф. Т. Барановский[[22]](#footnote-22) рассмотрел смешанную задачу для уравнения

, (13)

,

вырождающегося при . При условии , доказаны существование и единственность обобщенного решения смешанной задачи.

Р. Г. Баранцев[[23]](#footnote-23) исследовал методом Фурье следующую смешанную задачу:

,

,



,



в предположении, что

,

где  − дважды дифференцируемая функция в , а  при  при  при  при .

Различным случаям вырождения посвящены также работы М. Б. Капилевича[[24]](#footnote-24) и других.

**§ 1. Задача Коши для гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными с начальными данными на линии параболичности**

**1. Определение. Постановка задачи Коши. Теорема Проттера о существования и единственности.** Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение

****, (1.1)

где ,  и  − непрерывные функции от  и  некоторой замкнутой области . Будем предполагать, что ,  и  ни в одной точке замкнутой области  не обращаются одновременно в нуль и имеют непрерывные частные производные до второго порядка в .

Уравнение (1.1) называется гиперболическим уравнением в области , если в этой области . Кривые , где − решение уравнения

,

называются *характеристическими кривыми* (или просто *характеристиками)* уравнения (1.1) а направление  определяемое из уравнения

,

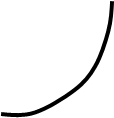
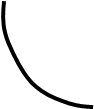
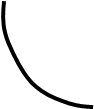
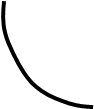
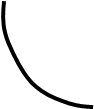
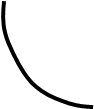
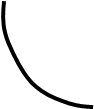
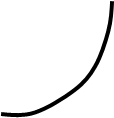
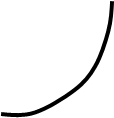
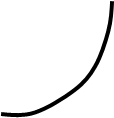
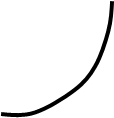
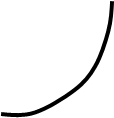
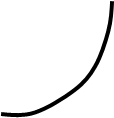
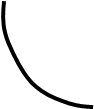
− *характеристическим направлением* уравнения (1.1).

Для гиперболического уравнения существуют два различных семейства вещественных характеристик.

Пусть (1.1) − гиперболическое уравнение в области . Будем называть его *вырождающимся гиперболическим уравнением* в замкнутой области , если на всей границе области  или на некоторой части этой границы ; эту часть границы будем называть *линией вырождения* (или *параболической линией*) уравнения (1.1). При этом ограничимся двумя случаями расположения параболической линии  на границе поля характеристических направлений уравнения (1.1):

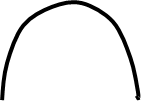
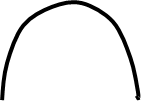
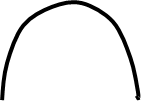
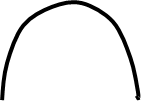
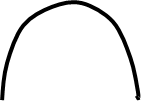
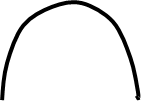
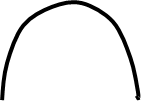
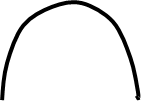
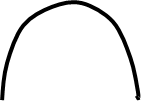
1) ни в одной точке параболической линии  касательная не совпадает с характеристическим направлением уравнения (1.1), т.е.



всюду вдоль . Тогда линия − геометрическое место точек возврата характеристик уравнения (1.1);

2) в каждой точке параболической линии  касательная совпадает с характеристическим направлением уравнения (1.1). Это означает, что вдоль  имеет место равенство

,

т. е. линия  является одновременно характеристикой уравнения (1.1) [огибающей семейства характеристик уравнения (1.1)]. 

В первом случае будем говорить, что уравнение (1.1) является *вырождающимся гиперболическим уравнением первого рода,* а во втором*−вырождающимся гиперболическим уравнением второго рода*

Рассмотрим линейное уравнение

 (1.2)

(где  и  при ) гиперболического в полуплоскости  с параболическим вырождением вдоль прямой .

Уравнение (1.2) при  два различных семейства вещественных характеристик, которые определяются уравнениями

.

Пусть − область, ограниченная отрезком  оси  и характеристиками  и  уравнения (1.2), выходящими соответственно из точек  и  и пересекающимися в точке .

*Регулярным решением* уравнения (1.2) в области  будем называть функцию , непрерывную в замкнутой области , имеющую непрерывные производные до второго порядка включительно в области  и удовлетворяющую уравнению (1.2).

**Задача Коши.** *Найти решение уравнения* (1.2) *в области D, удовлетворяющее начальным условиям*

, (1.3)

*где и −заданные функции.*

**2. Теорема Проттера.**

Теорема 1. *(Проттер). Пусть:*

*10) функция  имеет непрерывные производные до второго порядка в замкнутой области ;*

20) *− непрерывная и монотонно возрастающая функция, причем *

*30)  и  непрерывны и имеют непрерывные частные производные до второго порядка по  a ;*

40) *выполнено условие*

** (1.4)

*Тогда существует единственное регулярное решение уравнения (1.1) в области , удовлетворяющее начальным данным (1.3), где  и −заданные функции, имеющие производные до третьего порядка, удовлетворяющие условию Липшица.*

*Задача Коши (1.1), (1.3) поставлена корректно.*

Приведенный ниже пример показывает, что для корректности задачи Коши для уравнения (1.1) с начальными данными на линии параболического вырождения условие (1.4) не является необходимым.

Рассмотрим уравнение

 (1.5)

где − вещественная постоянная. Легко видеть, что условие (1.4) не выполняется. Покажем, что при  задача Коши для уравнения (1.5) с начальными данными (1.3) поставлена корректно.

С помощью характеристических координат



уравнение (1.5) приводится к уравнению Эйлера-Дарбу

 (1.6)

где

.

Если то и решение уравнения (1.6) имеет вид





где  и  − произвольные функции, откуда, возвращаясь к старым переменным, получим решение уравнения (1.5):





 (1.7)

Используя начальные данные (1.3), находим



 (1.8)

Подставив выражение (1.8) в (1.7), получим искомое решение задачи Коши:



 (1.9)

Решение (1.9) единственно, в чем нетрудно убедиться, воспользовавшись методом Римана. Очевидно, решение (1.9) непрерывно зависит от начальных данных (1.3).

В случае решение уравнения (1.5) имеет вид





,

откуда, используя начальные данные (1.3), получаем





В случае же  аналогично находим, что функция





есть единственное решение уравнения (1.5), удовлетворяющее начальным данным (1.3).

Для уравнения

 (1.10)

условие (1.4) принимает более простой вид

 (1.11)

При  задача Коши для уравнения (1.10) с начальными данными (1.3) поставлена корректно, так как условие (1.11) выполняется для любой ограниченной функции . При  и при невыполнении условия (1.11) задача Коши вообще может оказаться некорректной. Если − величина ограниченная и если коэффициенты  правая часть  уравнения (1.10) и начальные данные  и  дифференцируемы по  достаточное число раз (в зависимости от ) то задача Коши (1.10), (1.3) поставлена корректно.

Рассмотрим, например, уравнение

 (1.12)

где  ( − целое число). Единственное решение уравнения (1.12), удовлетворяющее начальным данным

 (1.13)

имеет вид



Эта формула показывает зависимость между величиной  и гладкостью начальных данных (1.13).

1. Дарбу Г. (Darboux G.), Leçons la thèorie des surfaces, 2-e ed. (Paris, Gauthier-Villars) p. 2a, livr. IV, Chap. III. [↑](#footnote-ref-1)
2. Трикоми Ф. (Tricomi F.), a) О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. Гостехиздат. 1947.

   б) Ancora sull’equazione . Rend. Acc. Linsei, 1927, Ser. VI, **6** (см. добавление к русскому переводу а). [↑](#footnote-ref-2)
3. Геллерстедт С. (Gellerstedt S.), a) Sur un problème aux limits pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second orde tipe mixte. The`se, Uppsala, 1935.

   b) Sur un problème aux limits pour I’équation , Arkiv. Mat., Ast. och Fysik, 1935, 25A, № 10.

   c) Sur une équation line`aire aux dérivées partielles de type mixte, Arkiv. Mat., Ast. och Fysik, 1937, 25A, № 29. [↑](#footnote-ref-3)
4. Франкль Ф.И., а) О задаче Коши для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с начальными данными на переходной линии. Изв. АН СССР, серия матем., 1944, 8, № 5, 195–224. [↑](#footnote-ref-4)
5. Березин И.С., О задаче Коши для линейного уравнения второго порядка с начальными данными на линия параболичности. Матем. сб., 1949, 24 (66): 2, 301 – 320. [↑](#footnote-ref-5)
6. Бицадзе А.В., Уравнения смешанного типа. Изд-во АН СССР, 1959. [↑](#footnote-ref-6)
7. Бабенко К.И., К теории уравнений смешанного типа. Дисс. доктора физ. – мат. наук. – М.: Матем. институт РАН, 1952. [↑](#footnote-ref-7)
8. Проттер М. (Protter M. H.), The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation with data on the parabolic line. Canad. J. Math., 1954, 6,4, 542–553. [↑](#footnote-ref-8)
9. Хельвиг Г. (Hellwig G.), Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen mit Singularitäten. J. Rat. Mech. and Anal., 1956, 5, № 2, 395 ­­– 418. [↑](#footnote-ref-9)
10. Конти Р. (Conti R.), a) Sul problema di Cauchy per l’eqazioni di typo misto . Ann.Scuòla norm. Sup. Pisa, Sci.fis. mat., 1950, ser. 3, **2**, 105 – ­­­­­­­130.

    b) Sul problema di Cauchy per l’eqazioni  con i data sulla linea parabolica. Ann. Math., 1950, 31, 303 – 326. [↑](#footnote-ref-10)
11. Хельвиг Г. (Hellwig G.), Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen mit Singularitäten. J. Rat. Mech. and Anal., 1956, 5, № 2, 395 – 418. [↑](#footnote-ref-11)
12. Терсенев С.А., О задаче с данными на линии вырождения для систем уравнений гиперболического типа. ДАН СССР, 1964, 155, № 2, 285 – 288. [↑](#footnote-ref-12)
13. Чи Минь – ю (Chi min-you) On the Cauchy problem for second order hyperbolic equations in two variables with intial data on the parabolic degenerating line. Acta Math. Sinica, 1962, 12, № 1, 68 – 76. [↑](#footnote-ref-13)
14. Бицадзе А.В., Уравнения смешанного типа. Изд-во АН СССР, 1959. [↑](#footnote-ref-14)
15. Терсенев С.А., 1) Об одном уравнении гиперболического типа, вырождающемся на границе. ДАН СССР, 1959, 129, № 2, 276 – 279. 2) К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения типа. Сибирск. матем. журнал., 1961, 2, № 6, 913 – 935. [↑](#footnote-ref-15)
16. Смирнов М.М., Задача Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка. Вестник Ленингр. ун­-та, 1960, 3, № 13, 50 – 58. [↑](#footnote-ref-16)
17. Николенко В.Н., Хайруллин И.Х., Об одной задаче для уравнения гиперболического типа, Сб. функц. анализа и теории функций, 1963, № 1, Казань, 72 – 82. [↑](#footnote-ref-17)
18. Терсенев С.А., 1) К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения типа. Сибирск. матем. журнал., 1961, 2, № 6, 913 – 935. 2) О задаче с данными на линии вырождения для систем уравнений гиперболического типа. ДАН СССР, 1964, 155, № 2, 285 – 288. [↑](#footnote-ref-18)
19. Карапетян К. И., О задаче Коши для уравнения гиперболического типа, вырождающегося на начальной плоскости. ДАН СССР, 1956, **106**, 6, 963 – 966. [↑](#footnote-ref-19)
20. Барановский Ф.Т., Задача Коши для линейного гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной плоскости. Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1958, **166**, 227 – 253. [↑](#footnote-ref-20)
21. Краснов М.Л., а) Смешанная краевая задача и задача Коши для вырождающихся гиперболических уравнений. ДАН СССР, 1956, **107**, 6, 789 – 792.

    б) Смешанные краевые задачи для вырождающихся гиперболических уравнений. Тр. Моск, энерг. ин-та, 1956, 28, 25 – 45.

    в) Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка. Матем. сб., 1959, **49** (91), 29 – 84. [↑](#footnote-ref-21)
22. Барановский Ф.Т., Смешанная задача для линейного гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной плоскости. Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1958, **183**, 23 – 58. [↑](#footnote-ref-22)
23. Баранцев Р.Г., а) Теоремы разложения, связанные с краевыми задачами для уравнения  в полосе  с вырождением или сингулярностью на границе. ДАН CCCP, 1958, **121**, № 1.

    б) Краевые задачи для гиперболического уравнения  в полосе  с вырождением или сингулярностью на границе, I;II. Вестник ЛГУ, 1959, № 19, 13 – 15; 1960, № 1, 14 – 33.

    в) Распространение особенностей решений уравнения гиперболического типа в полосе с отражением от нерегулярных стенок. Научн. докл. высш. школы, серия физ.-матем. наук, 1958, 5, 10 – 18. [↑](#footnote-ref-23)
24. Капилевич М.Б., а) Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа. Матем. сб., 1952, **30** (72), 1, 11 − 38.

    б) К теоремам единственности сингулярных задач Дирихле − Неймана. ДАН СССР, 1959, **125**, 1, 23 − 26.

    в) К теории линейных дифференциальных уравнений с двумя перпендикулярными линиями параболичности. ДАН СССР, 1959, **125**, 2, 251 − 254.

    г) О сингулярных задачах Коши для уравнения Чаплыгина. ДАН СССР, 1962,**146**, 2, 527 − 530. [↑](#footnote-ref-24)