**§ 2. Задача Коши для вырождающихся гиперболических уравнений первого рода. Метод Римана.**

**1. Постановка задачи.** Пусть в полуплоскости  требуется найти решение уравнения

 (2.1)

с начальными данными на параболической линии:

 (2.2)

 Уравнение (2.1) в характеристических координатах

 (2.3)

примет вид

 (2.4)

где



 (2.5)







Начальные условия принимают вид



 (2.6)

 Преобразование (2.3) является не особым при , причем полуплоскости  оно ставит в соответствие полуплоскость . Прямая , т. е.  является особой этого преобразования.

 Если в полуплоскости  коэффициенты  уравнения (2.1) дифференцируемы, а коэффициент  непрерывен, то такими же свойствами обладают и коэффициенты при  и  уравнения (2.4) в полуплоскости , а на прямой  они обращаются в бесконечность.

 **2. Частный случай уравнения (2.1).** Рассмотрим сначала случай, когда в уравнении (2.1) коэффициенты и  тождественно равны нулю, т. е.

**** (2.7)

Тогда уравнение (2.4) переходит в уравнение Эйлера - Дарбу

 (2.8)

Для уравнения (2.8) функция Римана известна:

 (2.9)

 где  − гипергеометрическая функция и

 (2.10)

 Обозначим через  область, ограниченную отрезком  прямой  и характеристиками  . Согласно формуле Римана, имеем



 (2.11)

 Используя известное для гипергеометрических функций тождество







в силу (2.6) получим









Принимая во внимание (2.12), из формулы (2.11) в пределе при получаем



 (2.13)

где

 (2.14)

Возвращаясь к старым переменным  имеем



 (2.15)

Отсюда легко видеть, что если  причем на концах интервала  они могут обращаться в бесконечность порядка соответственно не больше чем  и то  имеет непрерывные производные второго порядка по  и  в области, ограниченной характеристиками  и отрезкам  осы . Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что функция (2.15) есть решение уравнения (2.7), удовлетворяющая начальным данным (2.2). Из самого способа получения формулы (2.15) и ее вида следует, что решение задачи Коши (2.7), (2.2) единственно и непрерывно зависит от начальных данных.

Выражение вида (2.13) будем называть *обобщенным решением* уравнения (2.7), если  и  непрерывны в интервале 

Для того чтобы обобщенное решение обладало той или иной гладкостью, необходимо чтобы функции  и  имели определенную гладкость. В дальнейшем обобщенное решение мы будем рассматривать в треугольнике , ограниченном отрезком  характеристики  отрезком  характеристики  и частью линии вырождения .

**3. Обобщенное решение уравнения (2.3) классa** Рассмотрим следующий класс обобщенных решений задачи Коши, введенный К. И. Бабенко[[1]](#footnote-1).

Говорят, что обобщенное решение (2.13) уравнения (2.7) принадлежит *классу*  если функция  удовлетворяет условию Гельдера показателем  при  а функция  удовлетворяет Гельдера с показателем  при 

Лемма 2.1. Если  − обобщенное решение класса  уравнения (2.7), то  и , непрерывны в треугольнике , а  непрерывна вплоть до линии вырождения и

Так как функции  и  то их можно представить в виде:



 (2.16)

где  достаточно мало, а  и — непрерывные функции при  Подставляя равенстве (2.16) в формулу (2.13), меняя порядок интегрирования и используя интегральное представление гипергеометрических функций, получаем



 (2.17)

где





Из формулы (2.17) видно, что  и существуют и непрерывны в треугольнике . Легко видеть, что



Первые производные от первых двух интегралов в формуле (2.17) ограничены величиной Учитывая это, имеем







и, следовательно,





равномерно при .

 4. **Общий случай (2.1).** Вернемся теперь к уравнению (2.4). Функция Римана  уравнения (2.4), как функция от , удовлетворяет сопряженному уравнению

.

и условиям



,



.

 Существование функции Римана  доказывается методом последовательных приближений.

Как и в случае уравнения (2.8), применяя формулу Римана к области , имеем





. (2.18)

 Если выполнено условие



или, что то же самое

, (2.19)

то коэффициенты при  и  в уравнении (2.4) при  имеют те же особенности, что и соответствующие коэффициенты уравнения (2.8). Таким образом, при соблюдении условия (2.19) функция Римана  уравнения (2.4) и ее производные при , имеют особенности того же порядка, что и функция Римана  уравнения (2.8), и, следовательно, в результате предельного перехода при  из формулы (2.18) мы получим решение задачи Коши для уравнения (2.1) с начальными данными (2.2). Это решение имеет вид



, (2.20)

где









,









.

Здесь

.

Из самого способа получения формулы (2.20) следует, что если задача Коши (2.1)−(2.2) имеет решение, то оно единственно в классе дважды непрерывно дифференцируемых решений уравнения (2.1) и что решение (2.20) непрерывно зависит от начальных данных (2.2). Можно показать[[2]](#footnote-2), что формула (2.20) представляет собой дважды непрерывно дифференцируемое решение задачи Коши (2.1) − (2.2) в области, ограниченной характеристиками  и линией вырождения , если  и  имеют непрерывные производные до второго порядка включительно при .

 Выражение (2.20) будем называть *обобщенным решением* уравнения (2.1), если  и  непрерывны в интервале .

1. Бабенко К.И., К теории уравнений смешанного типа. Дисс. доктора физ. – мат. наук. – М.: Матем. институт РАН, 1952. [↑](#footnote-ref-1)
2. Ф р а н к л ь Ф. И., а) О задаче Коши для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с начальными данными на переходной линии. Изв. АН СССР, серия матем., 1944, 8, № 5, 195-224. б) К теории уравнения . Изв. АН СССР, серия матем., 1946, 10, № 2, 135-166. [↑](#footnote-ref-2)