**§ 3. Задача Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго рода. Метод Римана.**

**1. Предварительные рассуждения.** Рассмотрим гиперболическое уравнение в полуплоскости :

.

(3.1)

Его характеристики − ветви семейства парабол

,

 (3.2)

имеют своей огибающей ось  − параболическую линию уравнения (3.1). Таким образом,  − линия параболического вырождения уравнения (3.1) − является одновременно его характеристикой. Это обстоятельство существенно отличает уравнение (3.1) от уравнения первого рода. Поведение решения уравнения (3.1) в окрестности линии параболического вырождения зависит от коэффициента  при производной  и показателя . Решение уравнения (3.1) и его производная  могут, вообще говоря, обращаться в бесконечность на параболической линии. Поэтому для уравнения (3.1), кроме обычной задачи Коши с начальными данными на линии параболичности, которая может оказаться не разрешимой, естественно исследовать эту задачу с видоизмененными начальными данными:

,

где .

Пусть  − область, ограниченная отрезком  оси  и характеристиками  и  уравнения (14.1), выходящими соответственно из точек и пересекающихся в точке .

*Регулярным решением* уравнения (3.1) в области  будем называть функцию, непрерывную в замкнутой области , имеющую непрерывные производные до второго порядка в области  и удовлетворяющую уравнению (3.1).

**2. Основные теоремы.**

Т е о р е м а 3.1. Если коэффициенты  и свободный член уравнения (3.1) непрерывны и имеют непрерывные производные первого порядка по  в замкнутой области  если , то существует единственное регулярное решение (3.1) в области , удовлетворяющее начальным данным

, (3.3)

где  и  имеют непрерывные производные до третьего порядка включительно.

Решение задачи Коши (3.1), (3.3) непрерывно зависит от начальных данных.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть:*

*) коэффициенты уравнения (3.1) непрерывны и имеют непрерывные производные первого порядка по  в :*

*)*  *при*  *равномерно относительно ;*

*)  непрерывна и имеет непрерывную первую производную по  в .*

*Тогда существует единственное регулярное решение уравнения (14.1) в области , удовлетворяющее начальным данным*

.

Т е о р е м а 3.3. *Пусть коэффициенты и свободный член уравнения (3.1) удовлетворяют следующим условиям:*

*10)  и  непрерывны и имеют непрерывные производные первого порядка по  в ;*

*20)  и удовлетворяет неравенствам  при ;*

*30) .*

*Тогда существует единственное регулярное решение уравнения (3.1) в области , удовлетворяющее начальным данным*

*, (3.4)*

*где  и  имеют непрерывные производные до третьего порядка включительно.*

*Решение задачи Коши (3.1), (3.4) непрерывно зависит от начальных данных.*

**3. Частный случай уравнения (3.1).** Пусть требуется найти решение уравнения

, (3.5)

удовлетворяющее начальным данным

. (3.6)

С помощью характеристических координат

 (3.7)

уравнение (3.5) приводится к уравнению Эйлера – Дарбу

, (3.8)

где . Начальные условия принимают вид

,

. (3.9)

При , т. е. при  решение уравнения (3.8) имеет вид



,

где  и  − произвольные функции. Возвращаясь к старым переменным

, получим решение уравнения (3.5):



,

(). (3.10)

Используя начальные данные (3.6), находим

.

(3.11)

Подставляя (3.11) в (3.10), получим искомое решение задачи Коши (3.5), (3.6):





. (3.12)

При , т. е. при  решение уравнения (3.8) имеет вид , где  и  − произвольные функции. Следовательно, функция

 (3.13)

является единственным решением уравнения (3.5), удовлетворяющим начальным условиям (3.6).

При , т.е. при , решение уравнения (3.8) имеет вид





,

где  и  − произвольные функции. Отсюда после простых вычислений получаем решение задачи Коши (3.8), (3.9) в виде





, (3.14)

где

. (3.15)

Возвращаясь к старым переменным  получим решение задачи Коши (3.5), (3.6):





, (3.16)

где

.

Если  и  то функция , определенная формулой (3.16), является дважды непрерывно дифференцируемым решением задачи Коши (3.5), (3.6) в области , ограниченной характеристиками  и линией вырождения .

Выражение вида (3.14) или (3.16) называть *обобщенным решением* уравнения (3.5) в области , если  и  непрерывны при .

**4. Обобщенное решение уравнения (3.5) класса** **.** Говорят, что обобщенное решение (3.14) или (3.16) принадлежит *классу*  если функция  непрерывна и интегрируема в , и если  − интеграл дробного порядка  от некоторой функции, непрерывной и интегрируемой в , т. е.

. (3.17)

Из равенства (3.17) легко следует, что . Без ограничения общности будем считать .

Л е м м а 3.1. *Обобщённое решение  непрерывно в замкнутой области .*

Доказательство. Полагая  представим в виде





 (3.18)

Нетрудно проверить, что функции  и  интегрируемы на  а поэтому  непрерывна при  и при . Из формулы (3.18) следует, что  Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. Если обобщенное решение и  то производные  и  непрерывны в , причем

. (3.19)

Доказательство. Подставив (3.17) в (3.18), получим









.

В интеграле  промежуток интегрирования по  разобьем на два:  Меняя порядок интегрирования, имеем



где













Для вычисления этих выражений положим



Используя подстановку и интегральное представление гипергеометрических функций, найдем





Таким образом,





,

где . Учитывая, что выражение в квадратной скобке равно , имеем

. (3.22)

Аналогично для  получим

. (3.23)

Подставив (3.22) и (3.23) в (3.21), а затем полученное для  выражение в (3.20), находим



, (3.24)

где

. (3.25)

В силу класса  из (3.25) следует, что функция  и интегрируема в . Так как , то из формулы (3.24), вытекает, что  и  существуют и непрерывны в .

Докажем теперь справедливость равенства (3.19). Из (3.24) имеем







. (3.26)

Интеграл  после замены  примет вид

.

Переходя к пределу, получим

. (3.27)

Вводя постоянную  из условия , разобьем интеграл на два: . Выполнив во втором интеграле подстановку найдем



,

Первое слагаемое в силу выбора  стремится к нулю при . Поэтому



. (3.28)

Переходя к пределу в (3.26) при  в силу (3.27), (3.28), (3.25) и (3.15) получаем

.

Лемма 3.2. доказана.