**§ 4. Задача Коши–Гурса.**

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим уравнение

, (4.1)

где  − положительное число.

Пусть  − область, ограниченная отрезком  оси абсцисс и характеристиками:

,



уравнения (4.1).

З а д а ч а К о ш и – Г у р с а. Найти в области  решение  уравнения (4.1), удовлетворяющее краевым условиям

, (4.2)

где  и  − заданные функции.

**2. Частный случай уравнения (4.1).** Рассмотрим сначала случай, когда в уравнении (4.1) коэффициенты  и  тождественно равны нулю, т. е.

. (4.3)

Уравнение (4.3) и краевые условия (4.2) в характеристических координатах

 (4.4)

принимают вид

, (4.5)

,

, (4.6)

где

,



. (4.7)

Область  преобразуется в треугольник  ограниченный характеристиками  и прямой .

**3. Функция Римана − Адамара.** Существенную роль при решении задачи Коши − Гурса играет так называемая функция Римана − Адамара. Для уравнения

 (4.8)

функция Римана − Адамара  определяется следующими условиями:

)  как функция от  есть решение сопряженного уравнения , а как функция от  − решение уравнения 

) ;

) ;

)  при ,

где

.

Функция Римана – Адамара  была построена Геллерстедтом. Она имеет вид

 (4.9)

где

, (4.10)

.

Здесь

.

Заметим, что условие  можно записать в виде

 при .

На основании формулы



можно записать



. (4.11)

Пусть  − дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (4.5) в треугольнике , удовлетворяющее краевым условиям (4.6). Так как

,

где

,

,

то, интегрируя тождество



по треугольнику (рис. 1), ограниченному отрезком  прямой , отрезком  характеристики  и  характеристики  и по прямоугольнику  ограниченному отрезками  и  соответственно характеристик  и  и отрезками  и  характеристик  и , а затем переходя к пределу при  получаем





, (4.12)

где

.

При выводе этой формулы мы воспользовались условиями , а также краевыми условиями (4.6).

Формула (4.12) дает представление решения уравнения (4.8) при произвольных краевых условиях (4.2) через функцию Римана − Адамара . Из самого способа получения формулы (4.12) что если задача Коши − Гурса (4.8), (4.2) имеет решение, то оно единственно.

Можно доказать, что формула (4.12) является обобщенным решением задачи Коши − Гурса, принадлежащее классу  если  удовлетворяет условию Гельдера с показателем  при  имеет ограниченную первую производную, удовлетворяющую условию Гельдера в, а  имеет ограниченные непрерывные производные первого порядка в области .

**4. Общий случай уравнения (4.1).** Вернемся, наконец, к уравнению (4.1). В характеристических координатах (4.4) оно приводится к виду



. (4.13)

Функция Римана − Адамара  задачи Коши − Гурса для уравнения (4.13), как известно, представима в виде



где  − функция Римана, a  − функция, обладающая следующими свойствами:

  по переменным  удовлетворяет уравнению (15.13), а по переменным  − ему сопряженному;

 



  при обращается в нуль порядка.

Так как функция Римана  удовлетворяет условиям:







,

то условие  можно записать в виде



,

где



, (4.14)









Таким образом, для существования функции Римана – Адамара нужно потребовать, чтобы

 (4.15)

Условие (4.15) выполняется, если, например,  или  где  в 

Приведенный ниже показывает, что если условие Проттера (4.4) не выполнено, то единственность решения задачи Коши−Гурса может нарушиться.

Рассмотрим уравнение

. (4.16)

Покажем, что однородная задача, соответствующая неоднородной задаче Коши−Гурса

 (4.17)

для уравнения (4.16), имеет бесчисленное множество линейно независимых решений, а неоднородная задача (4.16), (4.17) разрешима тогда и только тогда, когда

 (4.18)

Решение уравнения (4.16) в области , удовлетворяющее второму условию из (4.17), выражается формулой



 (4.19)

Используя первое из условий (4.17), имеем





или, заменяя  на  и вводя новую переменную интегрирования 

.

Отсюда дифференцируя по получаем.

При выполнении условия (4.18) решение задача Коши − Гурса (4.16), (4.17) определяется по формуле (4.19), где  − произвольная функция. Нетрудно видеть, что

.

является решением однородной задачи Коши − Гурса.

Рассмотрим задачу Коши − Гурса для уравнения (4.16) в области , когда значение функции задается на характеристике , т. е.

 (4.20)

Используя краевое условие на характеристике , из формулы (4.19) получаем





или, заменяя  на , имеем



 (4.21)

Подставив (4.21) в формулу (4.19), получим решение задачи Коши − Гурса (4.16), (4.20).

Из формул (4.18), (4.19) и (4.21) заключаем, что для уравнения (4.16) в области  поставлена корректно задача Коши − Гурса, если  задается на характеристике, а не на характеристике .