**Лекция 8**

**Собственные векторы и собственные значения**

**линейного оператора**

Пусть *A* – оператор из . Число **С** (**С** – поле комплексных чисел) называется собственным значением оператора *A*, если существует ненулевой вектор , такой, что

 **. (1)

Всякий вектор , удовлетворяющий условию (1), называется собственным вектором оператора *A*, соответствующим собственному значению λ.

**Утверждение** 1. Если  – матрица линейного оператора *A* в произвольном базисе  пространства , то многочлен  не зависит от выбора базиса [*e*].

Доказательство. Пусть [*e*] и  – два произвольных базиса пространства  и *T –* матрица перехода от базиса [*e*] к базису . Тогда согласно (1) имеем



и следовательно,

, т.е.

.

**Определение** 1. Многочлен  называется характеристическим многочленом оператора *A*. Уравнение  называется характеристическим уравнением.

Имеет место следующая важная

**Теорема** 1. Для того чтобы число было собственным значением оператора , необходимо и достаточно, чтобы это число было корнем характеристического уравнения  оператора *A*, причем этому собственному числу соответствует *n – r* линейно-независимых собственных векторов оператора *A*, где *r* равно рангу матрицы .

**Доказательство**. Условие, что вектор – собственный, т.е. равенство (1) в матричной форме в базисе [*e*] может быть записано в виде



или  (2)

Необходимым и достаточным условием существования ненулевого решения однородной системы (2) является равенство нулю ее определителя

 . (3)

Поэтому корни уравнения (3) и только они являются собственными значениями оператора *A* (в действительном пространстве они действительны, в комплексном, вообще говоря, комплексные). Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Далее пусть  – собственное значение оператора *A*, т.е. корень характеристического уравнения (3). Подставляя  в систему (2), получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений с матрицей . Если ранг этой матрицы равен *r*, то соответствующая система имеет *n*–*r* линейно независимых собственных векторов, отвечающих значению .

Итак, получено следующее правило для нахождения собственных векторов и собственных значений оператора *A*.

1. Составив характеристическое уравнение , най­дем все корни этого уравнения. Согласно предыдущей теореме они и будут собственными значениями оператора *A*.

2. Возьмем произвольное найденное собственное значение  оператора *A*. Подставив  в систему (2), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений для нахождения координат в базисе [*e*] собственных векторов оператора *A*. Очевидно, что *n*–*r* векторов , входящих в фундаментальную систему решений, указанной однородной системы и образуют линейно-независимые собственные векторы оператора *A*. Их линейная оболочка с исключением из нее нулевого вектора дает все собственные векторы, отвечающие собственному значению .

Перебрав таким способом все корни характеристического уравнения, найдем все собственные векторы оператора *A*.

Согласно основной теореме алгебры любой многочлен степени *n*(*n*1) с комплексными коэффициентами имеет в поле комплексных чисел ровно *n* корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность. Напомним, что число  называется корнем многочлена



кратности *s*, если этот многочлен можно представить в виде , причем .

Если алгебраической кратностью собственного значения назвать его кратность как корня характеристического многочлена, то в комплексном линейном пространстве  размерности *n* любой оператор  имеет *n* собственных значений (с учетом их алгебраической кратности). При этом существует хотя бы один собственный вектор.

Если собственному числу  соответствует *p*(*p*1) линейно-независимых собственных векторов, то *p* называется геометрической кратностью собственного значения  оператора *A*. Если *p* 1, то  называется простым собственным значением; если *p*> 1, то – кратным собственным значением.

На вопрос о том, как соотносятся между собой алгебраическая и геометрическая кратности собственного числа , дает ответ следующее

**Утверждение** 1. Для любого оператора  геометрическая кратность любого собственного значения  не превосходит его алгебраической кратности.

**Доказательство**. Пусть  – собственное значение оператора *A* алгебраической кратности *s*. Тогда характеристический многочлен  оператора *A* можно представить в виде

 **, (4)

где  – многочлен степени *n – s* и .

Далее пусть  имеет геометрическую кратность *k*. Согласно определению это означает, что имеется *k* линейно-независимых собственных векторов оператора *A*, отвечающих собственному значению . Обозначим их  и дополним их векторами  до базиса во всем пространстве . В этом базисе матрица *Ae* оператора *A*, очевидно, имеет вид:

,

где *C* – некоторая матрица порядка *n×*(*n – k*).

Тогда, как нетрудно заметить,  , где  – некоторый многочлен степени *n – k*. Следовательно, из (4) получаем *k*≤*s*. #

**Замечание** 1. Геометрическая кратность может быть и меньше алгебраической. Например, оператор , задаваемый в базисе  матрицей , имеет собственное значение , алгебраическая кратность которого равна 2, а геометрическая кратность равна 1.

**Инвариантное подпространство.**

**Свойства собственных векторов линейного оператора**

1. Определение инвариантного подпространства

Пусть *V* – произвольное линейное пространство, *A* – линейный оператор, действующий в пространстве *V*.

**Определение** 2. Линейное подпространство  называется инвариантным относительно оператора *AL*(*V*), если для каждого вектора  вектор *Ax* также принадлежит .

Тривиальными инвариантными подпространствами являются подпространство, состоящее только из нуля, и все пространство.

**Утверждение** 2. Образ  и ядро ** оператора *AL*(*V*) являются инвариантными подпространствами.

Доказательство. В самом деле, если , то в силу опре­деления  и . Далее, если , то и . #

2. Геометрическая интерпретация собственных векторов

и собственных значений оператора ***A***

Пусть *A* – линейный оператор, действующий в действительном линейном пространстве  и пусть  (*k*≤*n*) – линейно-независимые собственные векторы оператора *A*, отвечающие собственным значениям соответственно. Как уже отмечалось выше, *L* есть инвариантное подпространство относительно оператора *A*. Очевидно, для любого



имеем 

Таким образом, преобразование *A* в подпространстве

*L*

есть «растяжение» (понимаемое в широком смысле) по направлениям векторов  с коэффициентами растяжения   соответственно. Отметим, что если , а  – базис из собственных векторов, то преобразование *A* в *L* есть преобразование подобия, т.е. каждый вектор  растягивается в раз.

3. Свойства собственных векторов линейного оператора

Свойство 1. Если *e* – собственный вектор оператора *AL*(*V*), отвечающий собственному значению λ, то для любого числа ,  – также собственный вектор оператора *A*, отвечающий тому же собственному значению λ.

Свойство 2. Если  – собственные векторы оператора *AL*(*V*), то *L* – линейная оболочка элементов  – есть инвариантное подпространство оператора *A*.

Свойство 3. Если некоторому собственному значению ** отвечает *k* линейно-независимых собственных векторов , то любой ненулевой вектор *x* из линейной оболочки *L* также является собственным вектором оператора *A*, отвечающим тому же собственному значению **.

Свойство 4. (теорема о линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям). Если  – собственные векторы оператора *AL*(*V*) и соответствующие им собственные значения  попарно различны, т.е.  при *i*≠ *j*, то  линейно независимы.

Доказательство. Свойство 9.5 следует из определения собственного вектора и линейности оператора *A*.

Свойство 5. Пусть  – собственные векторы оператора *A*, отвечающие собственным значениям , т.е. , *k*1, 2,…, *m*. Рассмотрим произвольный элемент . Из определения линейной оболочки   следует, что элемент *x* можно представить в виде ** (**,..., ** – некоторые числа). Тогда, очевидно,



Свойство 6. Если , то согласно определению линейной оболочки существуют числа **, такие, что **. Тогда указанное свойство следует из определения собственного вектора и цепочки равенств:



Свойство 7. Доказательство этого свойства проведем методом математической индукции. Для *m* 1 утверждение очевидно. Пусть это свойство верно для *m*– 1 векторов. Докажем его для *m* векторов. Предположим, что имеет место равенство:

 **. (5)

Применяя к обеим частям последнего равенства оператор *A*, получаем

.

Вычитая из последнего равенства равенство (5), умноженное на **, получаем

.

В силу индуктивного предположения о линейной независимости *m*– 1 векторов  имеем

.

Так как  при *i**j*, то **, . Отсюда и из (5) следует, что **, так как . Итак, из равенства (5) получили **. Это означает, что векторы  линейно независимы. Индукция проведена. #

Следствие 8. Если оператор  имеет *n* попарно различных собственных значений, то соответствующие им собственные векторы  образуют базис в пространстве .

Доказательство. Из свойства 4 следует, что  линейно независимы, а тогда они образуют базис втак как 

**Приведение матрицы оператора к диагональному виду**

Определение 2. Квадратная матрица  *n-*го порядка называется диагональной, если все ее элементы  при *i**j* равны нулю.

Утверждение 2. Если  – линейно-независимые соб­ственные векторы оператора *A*, *j* 1, 2,…, *k*), то матрица  оператора *A* в базисе  имеет вид:

,

где  и  – некоторые матрицы порядков *k ×*(*n – k*) и (*n –k*)*×*(*n – k*) соответственно.

Доказательство. Непосредственно следует из определения матрицы оператора *A*. #

Теорема 2. Матрица  оператора ** в базисе  имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда базисные векторы  являются собственными векторами оператора *A*. При этом матрица  в базисе из собственных векторов имеет вид:

, (6)

где **, *i* =1, 2,…, *n*, – собственные значения оператора *A*:

**.

Доказательство. Достаточность. Если базис  состоит из собственных векторов оператора *A*, т.е. **, *k*= 1, 2,…, *n*, то согласно определению матрицы линейного оператора имеем

,

т.е.  является диагональной.

Необходимость. Пусть матрица  линейного оператора *A* в данном базисе [*e*] имеет вид (6). Тогда, очевидно, для любого *i*=1, 2,…, *n *, т.е.  – собственные векторы, а  – собственные значения оператора *A*. #

**Теорема** 3. Если  – различные собственные значения оператора **, то существует базис [*e*], в котором матрица  оператора *A* имеет диагональный вид (6).

**Доказательство**. Действительно, согласно следствию 2 собственные векторы , отвечающие собственным значениям , образуют базис в пространстве . #

**Замечание** 2. Обратное утверждение неверно. Например, для тождественного оператора *I* матрица  имеет вид:

.

Она – диагональная, а собственные значения оператора  – кратные. Можно дать еще один критерий, когда матрица линейного оператора может быть приведена к диагональному виду.

**Теорема** 4. Для того чтобы существовал базис , в котором матрица  линейного оператора *A*, действующего в комплексном пространстве , имела бы диагональный вид необходимо и достаточно, чтобы для каждого собственного значения оператора *A* его алгебраическая кратность совпадала с геометрической.

**Доказательство**. Необходимость. Пусть существует базис , в котором матрица линейного оператора имеет диагональный вид (9.26). Очевидно, что векторы  – собственные векторы оператора *A*, отвечающие собственным значениям . Тогда характеристическая матрица оператора *A* имеет вид

 **, (7)

а характеристический многочлен

.

Если, например, ** имеет алгебраическую кратность , т.е. ; , то на диагонали матрицы (7) при ** первые  элементов равны нулю, а остальные отличны от нуля, поэтому , а тогда согласно теореме 3 собственному значению ** отвечает  линейно независимых собственных векторов оператора *A*. Следовательно, алгебраическая и геометрическая кратность ** совпадают.

**Достаточность**. Пусть для каждого собственного значения **, *i*= 1,2,…, *s* его алгебраическая кратность  совпадает с геометрической, т.е. каждому собственному значению ** соответствует  линейно-независимых собственных векторов. Эти векторы, очевидно, образуют базис в своей линейной оболочке . Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

 для любых ,  *i*, *j* =1,2,…, *s*. (8)

Действительно, тогда, как легко видеть, объединение базисов подпространств  для всех *i* 1,2,…, *s* дает базис всего пространства , так как , причем полученный базис состоит из собственных векторов оператора *A*. В таком базисе, как известно (см. теорема 5), матрица оператора имеет диагональный вид (6).

Итак, перейдем к доказательству равенства (8). Предположим противное, т.е. что существует ненулевой вектор , *i**j*. Тогда согласно свойству 5 собственных векторов вектор *a* является собственным вектором оператора, отвечающим как собственному числу **, так и **, причем **, что противоречит свойству 6 собственных векторов. Полученное противоречие доказывает равенство (8), а следовательно, и теорему в целом. #

**Практический способ приведения матрицы**

**к диагональному виду**

Пусть *S* – матрица перехода от «старого» базиса [*e*]   к «новому» базису , состоящему из собственных векторов оператора , т.е.



Теорема 5. Имеет место следующее равенство:

 **, (9)

где  – матрица оператора *A* в «старом» базисе [*e*], а



есть диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные значения оператора *A*.