**Модуль: КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

1. **Каноническое уравнение гиперболы, её свойства и построение**

*Аннотация*

*В данной лекции приведены специальное определение гиперболы, основанное на его фокальных свойствах, используя определения гиперболы выводится её каноническое уравнение, способы построения гиперболы, а также выводится параметрическое уравнение гиперболы.*

***Базовые фразы****:* гипербола, фокусы гиперболы, полуоси гиперболы, центр гиперболы, фокальные радиусы, эксцентриситет, каноническое уравнение гиперболы, асимптоты гиперболы, параметрическое уравнение гиперболы.

План

1. Каноническое уравнение гиперболы
2. Свойства гиперболы и её построение
3. Параметрическое уравнение гиперболы
4. **Каноническое уравнение гиперболы**

**Определение 1.1.** Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, таких, что модуль разности расстояний от любой точки до двух фиксированных точек  и  этой плоскости есть постоянное число. Это число мы обозначим через 2*а.* Точки  и  называются фокусами гиперболы, расстояние между ними обозначается через  и называется фокусным расстоянием. Число *а* называется действительной полуосью гиперболы. Середина *O* отрезка  соединяющего фокусы называется центром гиперболы, а вся прямая  называется его фокальной или действительной осью. Прямая, проходящая через центр гиперболы перпендикулярно к действительной оси, называется мнимой осью гиперболы.

Естественно считать, что фокусы  и  не совпадают (*с*> 0) (иначе, если *a*≠ 0, то ни одна точка плоскости не может удовлетворять определению гиперболы. Если же *а*= 0, то любая точка плоскости удовлетворяет определению гиперболы). Пусть *P* – произвольная точка гиперболы, тогда по определению гиперболы . Так как модуль разности двух сторон треугольника  меньше чем третьей стороны, модуль разности расстояний произвольной точки от фокусов  и , очевидно, не может быть больше чем расстояния между фокусами  и , т.е. , причем геометрическое место точек, для которых *a = c* представляет собой множество точек прямой , за исключением точек интервала . Естественно этот случай исключить из рассмотрения. В дальнейшем будем считать *a < c.* Будем также считать, что *a*> 0(так как в случае *a*= 0 геометрическое место точек, удовлетворяющих определению гиперболы, представляет собой прямую, перпендикулярную к отрезку  в его середине. Если нам дана какая-нибудь гипербола с фокусами  и , то для вывода ее уравнения выберем начало координат в середине отрезка , а оси 0*x* и 0*y* направим так, как указано на рис. 36.

Число



называется эксцентриситетом гиперболы, оно всегда .

Для вывода канонического уравнения гиперболы введем декартовую систему координат следующим образом, которую будем называть канонической системой (для данной гиперболы). Выберем начало О декартовой системы координат в середине отрезка , а ось ОХ направим в направлении , считая ее направленной от  к  (рис. ). Выведем уравнение гиперболы в этой системе координат. Пусть  – произвольная точка гиперболы в выбранной системе координат фокусы  и , очевидно, соответственно имеют координаты , , фокус  назовем условно левым, а фокус  правым. Обозначим через  и  расстояния от точки *P* до фокусов  и  соответственно (числа  и , называются фокальными радиусами точки *P*). Точка *P* будет находится на данном гиперболе тогда и только тогда, когда

 (2.1)

или

 .

Так как  то (2.1) примет вид:

 (2.1 *а*)

или

. (2.1 b)

Это и есть уравнение заданной гиперболы в нашей специальной системе координат. Запишем это уравнение в более простом виде. Для этого перенесем второй радикал в правую часть.



Возводя после этого обе части уравнения в квадрат, получаем

,

Раскрывая скобок и после упрощения получим

.

Ещё раз возводя обе части уравнения в квадрат после очевидных преобразований имеем

. (2.2)

Так как , то число  положительно, вводя обозначение , называя число  мнимой полуоси гиперболы. Следовательно, равенство (1.2) будет иметь следующий вид



или . (2.3)

Покажем, что уравнение (2.3) есть каноническое уравнение нашей гиперболы. Мы только доказали, что каждая точка  удовлетворяющая уравнению (2.1) и удовлетворяет уравнению (2.3). Теперь мы должны доказать обратное, каждая точка  удовлетворяющая уравнению (2.3) является точкой гиперболы. С другими словами нужно остается показать, что любая точка  удовлетворяющая уравнению (2.3), есть точка гиперболы, т.е. для нее справедливо . Доказательство не очень очевидно, так как при переходе от уравнения (2.1) к уравнению (2.3) два раза обе стороны уравнения возвели в квадрат, в этом случае могут появиться корни, удовлетворяющие уравнению (2.3), но не удовлетворяющие уравнению (2.1).

Итак, пусть координаты точки  удовлетворяют (2.3). Находим расстояния  и  от точки  до фокусов  и . Имеем

,

Находя из уравнения (2.3) значение



подставляя значение  в выражение для , после возведения в квадрат и несложных преобразований получим:

.

Аналогичным образом вычислим значение



Значения  и  должны быть положительны. Для определения знака этих расстояний, рассмотрим два случае когда  и .

Пусть , учитывая значение  и из уравнения (2.3) имеем  следовательно . Таким образом, для  получим  и . Значит, при  получим  и точка , координаты которого удовлетворяет уравнению (2.3) лежит на гиперболе.

Положим, . Для гиперболы эксцентриситет  и из уравнения (2.3) имеем  следовательно . Таким образом, для  получим  и . Значит, при  получим  и точка , координаты которого удовлетворяет уравнению (2.3) лежит на гиперболе.

Следовательно, получаем , точка , удовлетворяющая уравнению (2.3), при­надлежит нашей гиперболе. Таким образом, мы доказали, что уравнение (2.3) действительно является уравнением гиперболы и оно называется каноническим уравнением гиперболы.

**2. Свойства гиперболы и ее построение**

Из уравнения (2.3) получим следующие свойства гиперболы.

1. Гипербола имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии (главные оси гиперболы) и центр симметрии (центр гипер­болы).

В самом деле, в уравнении (2.3) и фигурируют в четных степенях. Следовательно, если точка  лежит на нашем гиперболе, т.е. координаты точки  удовлетворяет уравнению (2.3), то тем же свойством обладает точка , симметричная точке *P* относительно оси абсцисс, точка , симметричная точке *P* относительно оси ординат, а также точка , симметричная точке  относительно начала координат. Таким образом, оси координат являются главными осями гиперболы, а начало координат - центром гиперболы.

2. Из уравнения (2.3) находим . Значит,  и получим . Следовательно, получим в полосе *– a*<*x*<*a* ограниченной прямыми , нет точек гиперболы.

*Рис. 38*

Из этого свойства следу­ет, что все точки гиперболы лежат или вправо от прямой *x= a* (правая ветвь гиперболы), или влево от прямой *x =-* *a* (левая ветвь гиперболы), кроме двух точек ,  (вершин гиперболы), лежащих на этих прямых и являющихся точками пересечения гиперболы с фокальной осью (т.е. осью, на которой лежат фокусы гиперболы). Эта ось (в нашем случае ось абсцисс) называется действительной осью гиперболы. Отметим, что с осью ординатгипербола не имеет точек пересечения. Эта ось называется мнимой осью гиперболы.

Теперь исследуем какого значимость прямоугольника, которого мы назовем основным прямоугольником гиперболы (см. рис. 38), ограниченный прямыми, параллельными действительной и мнимой осям гиперболы и отстоящими от них соответственно на расстоянии *b* и *a*. (Числа *a* и *b* являются соответственно длинами вещественной и мнимой полуосей гиперболы.)

Теперь докажем, что прямые , являющиеся диагоналями основного прямоугольника» называются асимптотами гиперболы (см. рис. 38). Учитывая симметрии гиперболы относительно осей координат для исследования ее формы достаточно рассмотреть лишь часть гиперболы, лежащую в первой координатной четверти, т.е. мы должны исследовать функцию  при *x*≥*a*.

3. Рассмотрим, расстояние между графиками части гиперболы и прямой , при одинаковых значениях *х*. Не трудно видеть, что при *x*≥*a* точки гиперболы  лежит ниже асимптоты . Докажем, при удалении точки *Р* гиперболы в бесконечность, т.е. при *x* → + ∞, расстояние *РN* от точки *Р* гиперболы до точки *N* прямой , стремится к нулю.

Берем произвольное *x*(*x*≥*a*). Ей соответствует точка  гиперболы с абсциссой *x* и точка  асимптоты с той же абсциссой *x.* При этом

 .

Очевидно,

.

Умножив и разделив последнее равенство на сопряженную часть выражения в скобках, получим



Из последнего равенства видна что разность



Следовательно, точка  гиперболы все время остается под точкой  асимптоты. Кроме того, значение разности при неограниченном возрастании *x*, монотонно убывая, стремится к нулю, т.е. расстояние  при стремлении *x* в бесконечность стремиться к нулю. Отсюда следует, и *PN*(так как 0 < *PN* < стремится к нулю. Из формулы (2.3) и свойств гиперболы в целом можно построит общий вид гиперболы (см. рис. 38). #

Замечание 2.1. При , основной прямоугольник превращается в квадрат. Следовательно, асимптоты будут взаимно перпендикулярными и эксцентриситет равен . Такую гиперболу назовём равнобокой или равносторонней и её уравнение имеет вид

.

Замечание 2.2. Уравнение , определяет в нашей специальной системе координат гиперболу, которая называется сопряженной при одних и тех же *a* и *b* по отношению к гиперболе, определяемой уравнением (2.3). Очевидно, что сопряженная гипербола имеет те же асимптоты, что и данная. Только здесь меняются местами действительная и мнимая оси, для сопряженной гиперболы ось ординат – действительная ось, а ось абсцисс – мнимая. Вершинами ее, очевидно, являются точки , а фокусы будут иметь координаты , , эксцентриситет равен .

*Замечание 2.3.* Непосредственно из определения гиперболы вытекает следующий способ его построения. В чертежную доску если вбиваются два гвоздика  и  (с расстоянием *2с* между ними) и прикрепляем к ним – к одной и другой две нитки; на них надеваем колечко и, натянув нитки, помещаем его в точке *P* между фокусами, где должна быть вершина гиперболы (не ограничивая общности можем считать вершина *P* расположена ближе к правому фокусу, чем левой). Если теперь перемещать колечко, натягивая нитки, то каждая из них – от булавки до колечек будут удлиняться на одну и ту же величину, так что разность их



будет постоянно. При этом карандаш, вставленный в колечко или прижатого к нему, будет описывать одну ветви гиперболы, как геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек  и  равна 2*а* (рис.). Поменяв местами уменьшаемой с вычитаемой , т.е. считаем вершина *P* расположена ближе к левому фокусу, чем правой и будем описывать другую ветви гиперболы.

**3. Параметрическое уравнение гиперболы**

Рассмотрим уравнение гиперболы (2.3), т.е.



Разлагая на множители получим



Вводя параметр *t* получим



Следовательно,

 (2.4)

Если обращать внимание на первое уравнение последней системы правая часть

 Значит, при  значение  Следовательно, система (2.4) определяет правую ветвь гиперболы. А при  значение Система (2.4) определяет левую ветвь гиперболы.

При  пологая  и получим систему уравнений

 (2.5)

При  обозначая  и получим равенство

 (2.5 а)

Теперь определим какова взаимное связь угла  с гиперболой. В случае окружности , угол , где  площадь сектора единичного круга с углом  В данном случае, угол , где  площадь области ограниченный с лучами исходящий из начала координат  и частью гиперболы 

***Задачи и упражнения***

1) Составить каноническое уравнение эллипса, если:

а) полуоси его соответственно равны 5 и 4;

б) расстояние между фокусами равно 8, а большая ось равна 10;

в) большая ось равна 26 и эксцентриситет .

2) Определить фокусы эллипса .

3) Оси эллипса совпадают с осями координат. Эллипс проходит через точки *P* (2, 2), *Q* (3, 1). Составить уравнение эллипса.

4) На эллипсе  найти точки, абсцисса которых равна -3.

5) Определить точки эллипса , расстояние которых до правого фокуса равно 14.

6) Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начало координат, если даны:

а) точка  эллипса и его малая полуось *b=3;*

b) точка  эллипса и его малая полуось *a=3;*

*c)* точки  и  эллипса;

*d*) точка  эллипса и расстояние между фокусами равен 8;

*е*) точка  эллипса и его эксцентриситет ;

*f*) точка  эллипса и расстояние  от нее до левого фокуса.

**Вопросы для самообразования**

1. Приведите определения гиперболы.
2. Какие точки называются фокусами гиперболы?
3. Как определяются полуоси гиперболы?
4. Какая точка называется центром гиперболы?
5. Как определяются фокальные радиусы гиперболы?
6. Что такое эксцентриситет гиперболы?
7. Выведите каноническое уравнение гиперболы.
8. Напишите параметрические уравнения гиперболы.